

О. В. Котова, Р. М. Тригуб

Аппроксимативные свойства методов суммирования интегралов Фурье

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. П. Моторным)

Определены точные порядки приближения индивидуальных функций $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ классическими методами суммирования интегралов Фурье: Гаусса–Вейерштрасса, Бохнера–Рисса и Марцинкевича–Рисса.

2π -периодические функции приближают на периоде $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ тригонометрическими полиномами, которые являются обычно линейными средними рядов Фурье. В случае непериодических функций на \mathbb{R} С. Н. Бернштейн предложил вместо полиномов использовать целые функции экспоненциального типа не выше σ (Ц. Ф. Э. Т. $\leq \sigma$) при $\sigma \rightarrow \infty$.

Давно известны прямые и обратные теоремы для таких приближений и их применение к теоремам вложения (см. [1] и, особенно, [2]). Периодические функции — это частный случай.

Еще в начале 1960-х гг. Р. М. Тригуб нашел точные порядки приближения индивидуальных функций, а не классов, классическими методами суммирования рядов Фурье [3, 4]. При этом, особенно в случае функций любого числа переменных [5] (см. также [6]), пришлось ввести специальные модули гладкости и К-функционалы. В настоящее время такие результаты называют “strong converse inequality” (см. [7] и приведенный там список литературы).

В настоящей работе некоторые из теорем монографии [6] для периодических функций обобщены на любые функции из L_p , $p \geq 1$, на евклидовом пространстве. Вместо рядов Фурье — интегралы Фурье. Для определения точного порядка приближения имеются два метода (см. [6, с. 362]). Первый из них основан на экстремальных свойствах полиномов (Ц. Ф. Э. Т. $\leq \sigma$), а второй — на принципе сравнения мультипликаторов Фурье [4, 8].

Отметим еще, что иногда даже точные неравенства для класса функций можно получить предельным переходом из периодического случая (см. [6, 5.5.9–5.5.10]).

Преобразование Фурье функции $g \in L_1(\mathbb{R})$ равно для $y \in \mathbb{R}$

$$\widehat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ixy} dx.$$

Для мультипликаторов Фурье (см. [9]) важно определить принадлежность функции — множителя пространству

$$A(\mathbb{R}) = \left\{ f: f(x) = \widehat{g}(x), \|f\|_A = \|g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty \right\}.$$

Свойства этой винеровской банаховой алгебры приведены в [10].

© О. В. Котова, Р. М. Тригуб, 2015

Через $W_{p,\sigma} = W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$ ($W_{\infty,\sigma} = B_\sigma$) обозначим множество Ц.Ф.Э.Т. $\leq \sigma$, сужение которых на \mathbb{R} принадлежит $L_p(\mathbb{R})$. По теореме Винера–Пэли преобразование Фурье функций из $W_{2,\sigma}$ равно нулю почти всюду вне $[-\sigma, \sigma]$ на \mathbb{R} (см. [11]).

И наконец,

$$\Delta_h f(x) = f(x) - f(x+h), \quad \dot{\Delta}_h f(x) = f(x+h) - f(x-h),$$

а модуль гладкости в L_p порядка r и шага $h > 0$

$$\omega_r(f, h)_p = \sup_{0 < \delta \leq h} \|\Delta_\delta^r f(\cdot)\|_p.$$

$c(\dots)$ — положительная величина, зависящая только от аргументов, стоящих в скобках.

Теперь сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. Пусть G_σ — линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \rightarrow W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. Для того чтобы при некотором $r \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$ было

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \leq c_1(r) \omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

необходимо и достаточно

$$\sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p \rightarrow L_p} < \infty, \quad \|g - G_\sigma(g)\|_p \leq c_2(r) \frac{1}{\sigma^r} \|g^{(r)}\|_p$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.

Теорема 2. Пусть G_σ — линейный непрерывный оператор $L_p(\mathbb{R}) \rightarrow W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. Для того чтобы при некотором $r \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$ было

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \geq c_3(r) \omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

необходимо, а если $\sup_\sigma \|G_\sigma\|_{L_p \rightarrow L_p} < \infty$, то и достаточно

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \geq c_4(r) \frac{1}{\sigma^r} \|g^{(r)}\|_p$$

для любой функции $g \in W_{p,\sigma}(\mathbb{R})$.

Пример 1. При $p \in [1, 2]$ положим

$$S_\sigma(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{f}(y) e^{ixy} dy,$$

а

$$G_\sigma(f) = S_\sigma(f) + \mu \Delta_{\frac{\sigma}{\alpha}}^r S_\sigma(f).$$

Тогда при $\alpha \in (0, \pi)$ и $\mu \neq 0$ для всех $g \in W_{p,\sigma}$ и $\sigma > 0$

$$\|g - G_\sigma(g)\|_p \asymp \frac{1}{\sigma^r} \|g^{(r)}\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими только от r , α и μ).

При $p \in (1, 2]$, $\alpha \in (0, \pi)$ и $\mu \neq 0$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\sigma > 0$

$$\|f - G_\sigma(f)\|_p \asymp \omega_r\left(f; \frac{\alpha}{\sigma}\right)_p,$$

а при $p = 1$ оценка приближения сверху и снизу не имеет место уже при $\mu = 1$ и любом α (см. также [6, 8.5.1]).

Теорема 3. Для того чтобы для данной функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ при некотором $r \in \mathbb{N}$ и $\sigma \rightarrow \infty$

$$A_\sigma(f)_p = \inf_{g \in W_{p,\sigma}} \|f - g\|_p \asymp \omega_r\left(f; \frac{1}{\sigma}\right)_p,$$

необходимо и достаточно, чтобы при $h \rightarrow +0$

$$\omega_r(f, h)_p = O(\omega_{r+1}(f, h)_p).$$

Для периодических функций эта теорема доказана, по сути, в [12].

Рассмотрим теперь удобный для применения принципа сравнения линеаризованный модуль гладкости, введенный для периодических функций еще в [4] (см. также [6, с. 362]).

Для $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $h > 0$

$$\tilde{\omega}_r(f, h)_p = \left\| \frac{1}{h} \int_0^h \Delta_\delta^r f(\cdot) d\delta \right\|_p$$

(точная верхняя грань по $\delta \in (0, h]$ заменена интегральным средним).

Теорема 4. Для любого $r \in \mathbb{N}$ и $p \geq 1$ существует такое положительное число $c(r)$, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $h \in (0, 1]$

$$c(r)\omega_r(f, h)_p \leq \tilde{\omega}_r(f, h)_p \leq \omega_r(f, h)_p.$$

Переходим к приближению функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ линейными методами суммирования интегралов Фурье.

Когда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, при $\varepsilon \rightarrow +0$

$$\Phi_\varepsilon(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \varepsilon t) \hat{\varphi}(t) dt \rightarrow f(x)?$$

Предполагаем здесь и далее, что $\varphi(0) = 1$, $\varphi \in C \cap L_1(\mathbb{R})$ и $\hat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $\Phi_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R})$, а если $\text{supp } \varphi \subset [-1, 1]$, то $\Phi_\varepsilon \in W_{p, \frac{1}{\varepsilon}}(\mathbb{R})$.

При $f \in L_1(\mathbb{R})$

$$\Phi_\varepsilon(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Сравним ашпроксимативные свойства разных методов суммирования.

Теорема 5. Если после устранения особенностей по непрерывности

$$\frac{1-\varphi}{1-\psi} - 1 \in A(\mathbb{R}),$$

то при любом $p \geq 1$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p \leq \left(1 + \left\| \frac{\psi - \varphi}{1 - \varphi} \right\|_A\right) \|f - \Psi_\varepsilon(f)\|_p.$$

Переходим к определению скорости сходимости через модули гладкости и K -функционалы (иногда специальные).

Теорема 6 (ускорение сходимости). Пусть дополнительно $\text{supp } \varphi \subset [-1, 1]$.

Если для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p \leq K_1 \omega_r(f; \varepsilon)_p,$$

то при любом $m \in \mathbb{N}$ для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - \Psi_\varepsilon(f)\|_p \leq K_1^m \omega_{rm}(f; \varepsilon)_p,$$

где $\psi = 1 - (1 - \varphi)^m$.

Пример 2 (стандартный пример для сравнения). Определим φ при четном и нечетном r , соответственно:

$$\varphi(x) = (1 - |x|^r)_+, \quad \varphi(x) = (1 - |x|^{r+1})_+ + i(1 - |x|)_+ |x|^r \text{sign } x.$$

Тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ и $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - \Phi_\varepsilon(f)\|_p \asymp \omega_r(f; \varepsilon)_p.$$

Определим теперь точный порядок приближения классическими методами суммирования Рисса–Марцинкевича, Гаусса–Вейерштрасса и Бохнера–Рисса.

Но сначала рассмотрим интегральный оператор $L_p \rightarrow W_{p,\sigma}$.

$$B_{r,\varepsilon}(f, x) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \Delta_{\varepsilon t}^r f(x)) \left(\frac{\sin \frac{t}{r+2}}{t} \right)^{r+2} dt, \quad B_{r,\varepsilon}(1, x) \equiv 1.$$

В [13] введены более общие средние, а общая оценка приближения средними $B_{r,\varepsilon}$ через ω_r доказана в [14] (см. также [1]).

Особенность $B_{r,\varepsilon}$, как оказалось, в том, что $\varphi = \varphi_\varepsilon$ (зависит от ε) и $\varphi_\varepsilon(x) = 1$ не только при $x = 0$. Поэтому в [15] для определения точного порядка приближения введен специальный модуль гладкости, так как ω_r не подходит.

Положим при $t \neq 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)

$$\Delta_{h,t} f(x) = \int_0^1 \left[f(x) - \frac{it}{e^{it} - 1} f(x + hu) \right] du.$$

Теорема 7. Пусть $r \geq 6$, $2 \leq s \leq r - 2$ и $s_1 = 2[(s + 1)/2]$ (целая часть), а $\{x_{k,\varepsilon}\}_{k=1}^q$ — все положительные корни уравнения $\varphi_\varepsilon(x) - 1 = 0$. Тогда существует $\delta(r) > 0$ такое, что при $\varepsilon < \delta(r)$ число q постоянное, $q \leq s_1$ и для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$,

$$\|f - B_{r,\varepsilon}(f)\|_p \asymp \|\Delta_{\varepsilon,0}^{s_1} \circ \prod_{k=1}^q \Delta_{\varepsilon,x_{k,\varepsilon}} \circ \Delta_{\varepsilon,-x_{k,\varepsilon}} f(\cdot)\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и ε).

При доказательстве теорем 4–7, как и следующих, используются принцип сравнения и некоторые леммы из доказательства аналогичных теорем для периодических функций.

Хорошо известно, что принцип сравнения мультипликаторов применим и в случае функций d переменных ($d \geq 2$).

$$\text{В пространстве } \mathbb{R}^d \text{ } x = (x_1, \dots, x_d), \quad (x, y) = \sum_{k=1}^d x_k y_k, \quad |x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Рассмотрим следующие средние двойных интегралов Фурье ($\alpha > 0$):

$$M_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \quad \varphi(x_1, x_2) = (1 - \max\{|x_1|, |x_2|\})_+^\alpha.$$

При $\alpha = 1$ этот метод суммирования двойных рядов Фурье изучал Марцинкевич (это средние арифметические квадратных частных сумм), а точный порядок приближения найден О.И. Кузнецовой (см. [6, 8.5.13]).

Теорема 8. При любом $\alpha > 0$ для любой $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$, $p \geq 1$, $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - M_{\varepsilon,\alpha}(f)\|_p \asymp \left\| \int_1^\infty \frac{1}{u^2} (\dot{\Delta}_{\varepsilon(e_1^\circ + e_2^\circ)}^2 + \dot{\Delta}_{\varepsilon(e_1^\circ - e_2^\circ)}^2) f(\cdot) du \right\|_p.$$

Здесь $\dot{\Delta}_h f(x) = f(x + h) - f(x - h)$, e_1° и e_2° — орты осей в \mathbb{R}^2 .

Теперь рассмотрим метод типа Гаусса–Вейерштрасса ($d \geq 1$, $\alpha > 0$)

$$G_{\varepsilon,\alpha}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \quad \varphi(x) = e^{-|x|^\alpha}.$$

Вопросы сходимости при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ изучены в [9, гл. I].

Найдем точный порядок приближения.

Теорема 9. При любом $\alpha > 0$ и натуральном $r > (d + \alpha - 1)/2$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - G_{\varepsilon,\alpha}(f)\|_p \asymp \left\| \int_{|u| \geq 1} \frac{1}{|u|^{r+\alpha}} \dot{\Delta}_{\varepsilon \frac{1}{\alpha} \cdot u}^{2r} f(\cdot) du \right\|_p$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, зависящими лишь от α и r).

И наконец, рассмотрим в том же смысле метод Бохнера–Рисса ($r \in \mathbb{N}$, $\delta > (d - 1)/2$, $\varepsilon \in (0, 1]$)

$$R_{\varepsilon,r,\delta}(f) = \Phi_\varepsilon(f), \quad \varphi(x) = (1 - |x|^{2r})_+^\delta.$$

Теорема 10. 1. При $p \in (1, +\infty)$ для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ и $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\|_p \asymp \sup_{|u| \leq 1} \|\dot{\Delta}_{\varepsilon u}^{2r} f(\cdot)\|_p.$$

2. Для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ или $C(\mathbb{R}^d)$ (Δ — оператор Лапласа)

$$\|f - R_{\varepsilon,r,\delta}(f)\| \asymp \left\| \int_{|u| \leq 1} \dot{\Delta}_{\varepsilon u}^{2r} f(\cdot) du \right\| \asymp \inf_{g \in C^{2r}} (\|f - g\| + \varepsilon^{2r} \|\Delta^r g\|)$$

(двусторонние неравенства с положительными константами, не зависящими от ε и f).

1. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. — Москва: Физматгиз, 1960. — 624 с.
2. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — Москва: Наука, 1977. — 456 с.
3. Тригуб Р. М. Конструктивные характеристики некоторых классов функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1965. — **29**, № 3. — С. 615–630.
4. Тригуб Р. М. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Там же. — 1968. — **32**, № 1. — С. 24–49.
5. Тригуб Р. М. Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Там же. — 1980. — **44**, № 6. — С. 1378–1409.
6. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier analysis and approximation of functions. — Dordrecht: Kluwer, 2004. — 585 p.
7. Draganov B. R. Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators // J. Approxim. Theory. — 2010. — **162**. — P. 952–979.
8. Shapiro H. S. Some Tauberian theorem with applications to approximation theory // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — **74**, No 3. — P. 500–504.
9. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — Москва: Мир, 1974. — 332 с.
10. Lifyand E., Samko S., Trigub R. The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview // Analysis and Math. Physics. — 2012. — **2**, No 1. — P. 1–68.
11. Levin B. Ya. Lectures on entire functions // Transl. Math. Monogr. Vol. 150. — Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1996. — 248 p.
12. Rathore R. K. S. The problem of A. F. Timan on the precise order of decrease of the best approximation // J. Approxim. Theory. — 1994. — **77**. — P. 153–166.
13. Бернштейн С. Н. О свойствах однородных функциональных классов // Докл. АН СССР. — 1947. — **57**, № 2. — С. 111–114.
14. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — **15**, № 3. — С. 219–242.
15. Тригуб Р. М. Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина // Матем. сб. — 2013. — **204**, № 12. — С. 127–146.

Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры, Макеевка
Донецкий национальный университет
Сумской государственной университет

Поступило в редакцию 16.09.2014

О. В. Котова, Р. М. Тригуб

**Апроксимативні властивості методів підсумовування інтегралів
Фур'є**

Визначено точні порядки наближення індивідуальних функцій $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ класичними методами підсумовування інтегралів Фур'є: Гауса–Вейєрштрасса, Бохнера–Рісса та Марцинкевича–Рісса.

O. V. Kotova, R. M. Trigub

Approximate properties of methods of summability of Fourier integrals

The exact orders of approximation of individual functions $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ by the classical methods of summability of Fourier integrals (Gauss–Weierstrass, Bochner–Riesz, Marcinkiewicz–Riesz) are determined.