

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, О. О. Пипка

## Про деякі властивості центральних та узагальнено центральних рядів груп

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Доведено, що клас локально скінченних груп, які мають скінченну експоненту, є класом Бера. Також знайдено клас груп, для яких фактор-група  $G/L$  групи  $G$  за її локально нільпотентним резидуалом  $L$  буде локально нільпотентною. Отримано нові автоморфні аналоги теореми Шура.

Нехай  $G$  — група. Верхнім центральним рядом групи  $G$  називається ряд

$$\langle 1 \rangle = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \zeta_2(G) \leq \cdots \zeta_\alpha(G) \leq \zeta_{\alpha+1}(G) \leq \cdots \zeta_\gamma(G),$$

де  $\zeta_1(G) = \zeta(G)$  — центр групи  $G$ ,  $\zeta_{\alpha+1}(G)/\zeta_\alpha(G) = \zeta(G/\zeta_\alpha(G))$ , для кожного порядкового числа  $\alpha$ , а якщо  $\lambda$  — граничне порядкове число, то  $\zeta_\lambda(G) = \bigcup_{\mu < \lambda} \zeta_\mu(G)$ . Останній член ряду

$\zeta_\gamma(G) = \zeta_\infty(G)$  називається *верхнім гіперцентром* групи  $G$ .

Нижнім центральним рядом групи  $G$  називається ряд

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \gamma_\alpha(G) \geq \gamma_{\alpha+1}(G) \geq \cdots \gamma_\delta(G),$$

де  $\gamma_2(G) = [G, G]$  — комутант групи  $G$ ,  $\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G]$ , для кожного порядкового числа  $\alpha$ , а якщо  $\lambda$  — граничне порядкове число, то  $\gamma_\lambda(G) = \bigcap_{\mu < \lambda} \gamma_\mu(G)$ . Останній член ряду

$\gamma_\delta(G) = \gamma_\infty(G)$  називається *нижнім гіпоцентром* групи  $G$ .

Питання про зв'язки між верхнім та нижнім центральними рядами досить непросто. Наприклад, вільна група, що має вільний ранг не менше 2, має нескінченний нижній центральний ряд, останнім членом якого є одинична підгрупа. Але водночас вона має одиничний центр, а тому її верхній центральний ряд складається лише з однієї одиничної підгрупи. З іншого боку, існують групи (наприклад, черніковські  $p$ -групи зі скінченим центром), які мають нескінченний верхній центральний ряд, а їх нижній центральний ряд є скінченим. У випадках, коли верхній центральний ряд є скінченим, ситуація більш визначена. Розглянемо це питання більш детально. Нагадаємо про такий відомий факт: якщо для групи  $G$  має місце рівність  $G = \zeta_k(G)$  для деякого натурального числа  $k$ , то  $\gamma_{k+1}(G) = \langle 1 \rangle$ . Р. Бер у роботі [1] отримав узагальнення цього результату, довівши, що якщо фактор-група  $G/\zeta_k(G)$  скінченна, то  $\gamma_{k+1}(G)$  також скінченна. З цього результату природно постає таке загальне питання: для яких класів груп  $\mathfrak{X}$  з умови  $G/\zeta_k(G) \in \mathfrak{X}$  завжди випливає включення  $\gamma_{k+1}(G) \in \mathfrak{X}$ ? Клас груп, який задовольняє цю умову, називається *класом Бера* [2]. Наслідком результату Р. Бера є теорема: якщо центр  $\zeta(G)$  групи  $G$  має скінченний індекс, то її комутант  $[G, G]$  буде скінченим. Цей результат також наведений в статті [1]. Але пізніше Ф. Холл назвав його *теоремою Шура* [3]. Після Ф. Холла ця назва закріпилася за даним результатом. І. Шур дійсно був першим, хто почав вивчати зв'язок між властивостями

фактор-групи  $G/\zeta(G)$  та комутанта  $[G, G]$  [4]. Але І. Шур мав справу тільки зі скінченними групами. Теорема Шура стала джерелом для багатьох подальших цікавих досліджень зв'язків між властивостями  $G/\zeta(G)$  та  $[G, G]$ . Вона та її численні узагальнення природно приводять до питання: *для яких класів груп  $\mathfrak{X}$  умова  $G/\zeta(G) \in \mathfrak{X}$  завжди тягне за собою включення  $[G, G] \in \mathfrak{X}$ ?* Клас груп, який задовольняє таку умову, називається *класом Шура* [5]. З теореми Шура випливає, що клас скінченних груп є класом Шура. Зараз знайдено багато інших класів Шура, серед яких клас локально скінченних  $\pi$ -груп ( $\pi$  — довільна множина простих чисел), клас черніковських груп та ін.

Очевидно, що кожен клас Бера є також одночасно і класом Шура. Тому досить природно постає інше питання: *які класи Шура є класами Бера?* Нещодавно А. Манн [6] довів, що клас локально скінченних груп, які мають скінченну експоненту, є класом Шура. Більш того, він довів, що якщо фактор-група  $G/\zeta(G)$  має скінченну експоненту  $e$ , то існує функція  $m(e)$ , для якої  $\exp([G, G]) \leq m(e)$ . Питання про те, чи буде клас таких груп класом Бера, до цього залишалося відкритим. Нижченаведена теорема дає позитивну відповідь на це питання.

**Теорема 1.** *Нехай  $G$  — група. Припустимо, що фактор-група  $G/\zeta_k(G)$  є локально скінченною групою, яка має скінченну експоненту  $e$ . Тоді  $\gamma_{k+1}(G)$  також є локально скінченною і має скінченну експоненту. Більш того, існує функція  $\beta_1(e, k)$ , для якої виконується нерівність  $\exp(\gamma_{k+1}(G)) \leq \beta_1(e, k)$ .*

Для груп, які були розглянуті в попередній теоремі, було досліджено також інше питання. Нагадаємо, що *локально нільпотентним резидуалом  $L$*  групи  $G$  називається перетин всіх нормальних підгруп  $H$ , для яких фактор-група  $G/H$  локально нільпотентна. У загальному випадку фактор-група  $G/L$  вже не обов'язково буде локально нільпотентною. Тому питання про пошук груп, для яких фактор-група  $G/L$  буде гарантовано локально нільпотентною, є актуальним. Подана нижче теорема показує нам клас груп, які мають вказану властивість.

**Теорема 2.** *Нехай  $G$  — група. Припустимо, що фактор-група  $G/\zeta_k(G)$  є локально скінченною групою, яка має скінченну експоненту  $e$ . Тоді локально нільпотентний резидуал  $L$  групи  $G$  також є локально скінченною групою, яка має скінченну експоненту, а фактор-група  $G/L$  локально нільпотентна. Більш того, існує функція  $\beta_2(e)$ , для якої виконується нерівність  $\exp(L) \leq \beta_2(e)$ .*

Слід відзначити, що експонента локально нільпотентного резидуалу залежить лише від експоненти фактор-групи  $G/\zeta_k(G)$  і не залежить від  $k$ .

Існують різноманітні підходи щодо узагальнень та аналогів теореми Шура. І серед них виник підхід, який пов'язаний з узагальненнями центра, верхніх та нижніх центральних рядів. Природні їх узагальнення пов'язані з групами автоморфізмів. Нехай  $G$  — група. Припустимо, що  $A$  — довільна підгрупа групи автоморфізмів  $\text{Aut}(G)$ . Покладемо

$$C_G(A) = \{g \in G \mid \alpha(g) = g, \forall \alpha \in A\},$$

$$[G, A] = \langle g^{-1}\alpha(g) \mid g \in G, \alpha \in A \rangle.$$

Підгрупу  $C_G(A)$  будемо називати  *$A$ -центром* групи  $G$ , а  $[G, A]$  —  *$A$ -комутаторною підгрупою* групи  $G$ . Відзначимо, що якщо  $A = \text{Aut}(G)$ , то  $C_G(A)$  називається *абсолютним центром* групи  $G$ , а  $[G, A]$  — *автокомутаторною підгрупою* групи  $G$ .

П. Хегарті довів [7], що якщо фактор-група  $G/C_G(\text{Aut}(G))$  скінченна, то взаємний комутант  $[G, \text{Aut}(G)]$  також скінченний. Проте скінченність фактор-групи  $G/C_G(\text{Aut}(G))$  є досить сильною умовою. Зокрема, звідси випливає, що група автоморфізмів  $\text{Aut}(G)$  є скінчен-

ною. Нескінченні групи зі скінченною групою автоморфізмів вивчалися багатьма дослідниками протягом довгого періоду часу. В роботі [8] було розглянуто більш загальну ситуацію:  $\text{Inn}(G) \leq A$ ,  $A/\text{Inn}(G)$  — скінченна група. Для цього випадку були отримані автоморфні аналоги теорем Шура, Бера та Холла.

Слід зауважити, що для довільної групи автоморфізмів аналог теореми Шура може і не виконуватись. Нижченаведений приклад ілюструє це. Нехай  $p$  — просте число і нехай  $G = \langle a \rangle \times K$ , де  $|a| = p$ ,  $K = \text{Dr}_{n \in \mathbb{N}} \langle b_n \rangle$  — нескінченна елементарна абелева  $p$ -підгрупа. Тоді група  $G$  має автоморфізм  $\alpha_j$ , який діє таким чином:  $\alpha_j(a) = ab_j$ ,  $\alpha_j(x) = x$ , для всіх  $x \in K$ . Неважко перевірити, що кожен автоморфізм  $\alpha_j$  має порядок  $p$ , а підгрупа  $A$  групи автоморфізмів  $\text{Aut}(G)$ , яка породжена  $\{\alpha_j, j \in \mathbb{N}\}$ , є елементарною абелевою  $p$ -групою. Крім того,  $C_G(A) = K = [G, A]$ , а тому фактор-група  $G/C_G(A)$  скінченна, але підгрупа  $[G, A]$  нескінченна.

Таким чином, цілком природним є питання: *для яких груп автоморфізмів автоморфний аналог теореми Шура має місце?* У попередньому прикладі група автоморфізмів  $A$  є нескінченною елементарною абелевою групою. А тому вона має нескінченний спеціальний ранг. У зв'язку з цим природно розглянути випадок, коли група автоморфізмів  $A$  має скінченний спеціальний ранг.

Нагадаємо, що група  $G$  має *скінченний спеціальний ранг*  $r(G) = r$ , якщо кожна скінченно породжена підгрупа групи  $G$  може бути породжена  $r$  елементами і  $r$  — найменше натуральне число з такою властивістю.

Поняття спеціального рангу та сам термін був введений А. І. Мальцевим [9].

Нижчеподаний результат є одним з автоморфних аналогів теореми Шура.

**Теорема 3.** *Нехай  $G$  — група і нехай  $A$  — підгрупа групи автоморфізмів  $\text{Aut}(G)$ . Більш того, нехай  $\text{Inn}(G) \leq A$  та  $|G/C_G(A)| = t$ . Якщо  $A/\text{Inn}(G)$  має скінченний спеціальний ранг  $r$ , то підгрупа  $[G, A]$  скінченна. Більш того, існує функція  $\beta_3(t, r)$ , для якої  $|[G, A]| \leq \beta_3(t, r)$ .*

Якщо  $\text{Inn}(G) \leq A$ , то  $C_G(A) \leq \zeta(G)$ , звідки отримуємо, що група  $\text{Inn}(G) \cong G/\zeta(G)$  скінченна. Таким чином, зі скінченності спеціального рангу фактор-групи  $A/\text{Inn}(G)$  впливає скінченність спеціального рангу підгрупи  $A$ .

Твердження теореми 3 можна сформулювати в більш загальній формі.

Нехай  $p$  — просте число. Будемо говорити, що група  $G$  має *скінченний секційний  $p$ -ранг*  $r_p(G) = r$ , якщо кожна елементарна абелева  $p$ -секція групи  $G$  скінченна і має порядок не більше ніж  $p^r$ , а також існує елементарна абелева  $p$ -секція  $A/B$  групи  $G$ , для якої  $|A/B| = p^r$ .

Відзначимо, що якщо група  $G$  має скінченний спеціальний ранг  $r$ , то  $G$  має скінченний секційний  $p$ -ранг для всіх простих чисел  $p$ . Обернене твердження в загальному випадку не має місця.

**Теорема 4.** *Нехай  $G$  — група і нехай  $A$  — підгрупа групи автоморфізмів  $\text{Aut}(G)$ . Більш того, нехай  $\text{Inn}(G) \leq A$  та  $|G/C_G(A)| = t$ . Якщо для кожного  $p \in \Pi(G/C_G(A))$  фактор-група  $A/\text{Inn}(G)$  має скінченний секційний  $p$ -ранг, то підгрупа  $[G, A]$  скінченна. Більш того,  $|[G, A]| \leq \beta_3(t, r)$ , де  $r = \max\{r_p(A) | p \in \Pi(G/C_G(A))\}$ .*

Я. Д. Половицький у роботі [10] отримав таке узагальнення теореми Шура: *якщо центральна фактор-група  $G/\zeta(G)$  групи  $G$  черніковська, то комутант групи  $G$  також є черніковською групою.* Нагадаємо, що група  $G$  називається *черніковською*, якщо вона містить нормальну абелеву підгрупу  $\text{Div}(G) = Q_1 \times \cdots \times Q_m$  ( $Q_j$  — квазіциклічні підгрупи), для якої фактор-група  $G/\text{Div}(G)$  скінченна. Підгрупа  $\text{Div}(G)$  називається *подільною частиною*

групи  $G$ . Число  $m$ , яке є інваріантом групи  $G$ , називається *мінімаксним рангом* групи  $G$ , і позначається  $\text{mm}(G)$ . Іншою характеристикою черніковської групи  $G$  є множина  $\Pi(\text{Div}(G))$ . Ми будемо використовувати для цієї множини спеціальний символ  $\text{Sp}(G)$ . Іншим числовим інваріантом черніковської групи  $G$  є порядок  $o(G) = |G/\text{Div}(G)|$ .

Автоморфним аналогом теореми Половицького є така теорема.

**Теорема 5.** *Нехай  $G$  – група і нехай  $A$  – підгрупа групи автоморфізмів  $\text{Aut}(G)$ ,  $H = G/C_G(A)$ . Припустимо, що виконуються такі умови:*

- (i)  $\text{Inn}(G) \leq A$ ;
- (ii)  $H$  – черніковська група;
- (iii) якщо  $H$  не є подільною, то ранг  $r_q(A)$  скінченний для кожного простого дільника числа  $o(H)$ ;

(iv) якщо  $H$  подільна, то існує просте число  $q$ , для якого ранг  $r_q(A)$  скінченний.

Тоді підгрупа  $[G, A]$  черніковська. Більш того,  $\text{Sp}([G, A]) \subseteq \text{Sp}(H)$ ,  $\text{mm}([G, A]) \leq \beta_4(\text{mm}(H), r, p)$ ,  $o([G, A]) \leq \beta_5(o(H), r)$ , для деяких функцій  $\beta_4$  та  $\beta_5$ , де  $p$  – найбільше просте число з множини  $\text{Sp}(H)$ ,  $r = \max\{r_p(A) \mid p \text{ – дільник } o(H)\}$  або  $r = r_q(A)$ , кожного разу, коли  $H$  подільна.

1. Baer R. Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen // Math. Ann. – 1952. – **124**. – P. 161–177.
2. Kurdachenko L. A., Otal J., Pyrkva A. A. Relationships between the factors of the upper and the lower central series of a group // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. – 2015, to appear.
3. Hall P. Nilpotent groups. – London: Queen Mary College, 1969. – 76 p.
4. Schur I. Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare substitutionen // J. Reine Angew. Math. – 1904. – **127**. – P. 20–50.
5. Franciosi S., de Giovanni F., Kurdachenko L. A. The Schur property and groups with uniform conjugate classes // J. Algebra. – 1995. – **174**. – P. 823–847.
6. Mann A. The exponents of central factor and commutator groups // J. Group Theory. – 2007. – **10**. – P. 435–436.
7. Hegarty P. The absolute centre of a group // Proc. J. Algebra. – 1994. – **169**. – P. 929–935.
8. Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Pyrkva A. A. On some variant of theorems of Schur and Baer // Milan. J. Math. – 2014. – **82**, No. 2. – P. 233–241.
9. Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – **22**. – С. 351–352.
10. Половицкий Я. Д. Группы с экстремальными классами сопряженных элементов // Сиб. мат. журн. – 1964. – **5**. – С. 891–895.

Дніпропетровський національний університет  
ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 24.03.2014

Л. А. Курдаченко, Х. Отал, А. А. Пыпка

## О некоторых свойствах центральных и обобщенно центральных рядов групп

*Доказано, что класс локально конечных групп, которые имеют конечную экспоненту, является классом Бэра. Также найден класс групп, для которых фактор-группа  $G/L$  группы  $G$  по ее локально нильпотентному резидуалу  $L$  будет локально нильпотентной. Получены новые автоморфные аналоги теоремы Шура.*

L. A. Kurdachenko, J. Otal, A. A. Pypka

## On some properties of the central and generalized central series of groups

*We prove that the class of locally finite groups having finite exponent is the Baer class. The class of groups, for which the factor-group  $G/L$  of the group  $G$  on its locally nilpotent residual  $L$  is locally nilpotent, is found. New automorphic analogs of the Schur theorem are obtained.*