

Об одном классе систем уравнений типа Лакса

(Представлено академиком НАН Украины Е. Я. Хрусловым)

Исследована нелинейная система уравнений типа Лакса, которая лежит в основе построения треугольных моделей для коммутативных систем линейных несамосопряженных ограниченных операторов. Описаны некоторые ее решения при $n = 3, 4$. Приводятся примеры представления общего решения в терминах специальных функций (эллиптически).

В работе изучаются все пары матриц-функций $\{a(x), \gamma(x)\}$ — $n \times n$ решений системы уравнений типа Лакса в случае $n = 4$ вида

$$\begin{cases} [a(x), \gamma(x)] = 0, & x \in [0, l], \\ \gamma'(x) = i[a(x), \sigma_2], & x \in [0, l], \\ \gamma(0) = \gamma^+, \end{cases} \quad (1)$$

где $a(x)$ — спектральная матричная мера, σ_2, γ^+ — самосопряженные $n \times n$ матрицы, и

$$a(x) \geq 0, \quad \text{tr } a(x) \equiv 1, \quad x \in [0, l]. \quad (2)$$

Система (1) возникает в результате продолжения условия сплетаемости [1] для характеристической функции коммутативных систем линейных несамосопряженных операторов вдоль общей цепочки инвариантных подпространств, на котором основано построение треугольных моделей для коммутативных систем операторов.

Описание решений системы (1).**Предложение 1.** Пусть

$$\sigma_2 = \text{diag}(b_1, \dots, b_n), \quad \gamma^+ = \alpha_1 \sigma_2 + \alpha_0 I + iC, \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$, матрица $C = (c_{jk})_{j,k=1}^n = -C^*$ и $c_{jj} = 0$, при $j \in \{1, \dots, n\}$. Пусть далее $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ — вещественные функции. Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, и $\gamma(\cdot) = (\gamma_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^n$, является решением системы (1) тогда и только тогда, когда при $x \in [0, l]$ выполнены равенства

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (4)$$

$$\gamma_{jk}(x) = i e^{i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x))} y_{jk}(x), \quad j \neq k, \quad (5)$$

где

$$K_j(x) := \int_0^x \kappa_j(t) dt, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (6)$$

а функции $y_{jk}(\cdot)$, $j \neq k$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y'_{jk}(x) = (b_k - b_j)\kappa_2(x) \sum_{s=1, s \neq j, k}^n y_{js}(x)y_{sk}(x), & x \in [0, l], \quad j \neq k, \\ y_{kj}(x) = \overline{y_{jk}(x)}, & x \in [0, l], \quad j \neq k, \\ y_{jk}(0) = c_{jk}, & j \neq k. \end{cases} \quad (7)$$

При этом если $c_{jk} \in \mathbb{R}$, $j \neq k$, то любое решение системы (7) является вещественным.

Теорема 1. Пусть $n = 3$, $\sigma_2 = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$, где b_1, b_2, b_3 — различные действительные числа, и $\gamma^+ = (\gamma_{jk}^+)_{j,k=1}^3$, причем

$$\gamma_{jk}^+ = ic_{jk}, \quad c_{jk} \in \mathbb{R}, \quad j \neq k, \quad (8)$$

$$c_{13} > 0, \quad c_{23} > 0, \quad (9)$$

$$(b_2 - b_3)\gamma_{11}^+ + (b_3 - b_1)\gamma_{22}^+ + (b_1 - b_2)\gamma_{33}^+ = 0. \quad (10)$$

Положим

$$\alpha_1 := \frac{b_3 - b_1}{b_1 - b_2}, \quad \alpha_2 := \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2}, \quad (11)$$

$$\psi_j(y) := \sqrt{c_{j3}^2 + \alpha_j(y^2 - c_{12}^2)}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (12)$$

$$F(y) := \int_{c_{12}}^y \frac{du}{\psi_1(u)\psi_2(u)}. \quad (13)$$

Пусть $(y_0^-, y_0^+) \subset \mathbb{R}$ — наибольший по включению интервал, который содержит число c_{12} и на котором корректно определены функции $\psi_1(\cdot)$, $\psi_2(\cdot)$, $F(\cdot)$, т. е. выполнено неравенство

$$c_{j3}^2 + \alpha_j(y^2 - c_{12}^2) > 0, \quad y_0^- < y < y_0^+, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (14)$$

В силу (9) и $\alpha_1 + \alpha_2 = -1$ такой интервал непустой и конечный.

Пусть далее $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 \in L^1[0, l]$ — вещественные функции и функции $K_1(\cdot)$, $K_2(\cdot)$ определены равенством (6), причем

$$F(y_0^-) < (b_1 - b_2)K_2(x) < F(y_0^+), \quad x \in [0, l]. \quad (15)$$

Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, и $\gamma(\cdot) = (\gamma_{jk}(\cdot))_{j,k=1}^3$, является решением задачи (1) тогда и только тогда, когда при $x \in [0, l]$ выполнены равенства

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (16)$$

$$\gamma_{jk}(x) = ie^{i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x))} y_{jk}(x), \quad j \neq k, \quad (17)$$

где функции $y_{jk}(\cdot)$, $j \neq k$, определены равенствами

$$y_{12}(x) = F^{-1}((b_1 - b_2)K_2(x)), \quad (18)$$

$$y_{j3}(x) = \psi_j(y_{12}(x)), \quad j \in \{1, 2\}, \quad (19)$$

$$y_{kj}(x) = -y_{jk}(x), \quad 1 \leq j < k \leq 3. \quad (20)$$

Здесь $F^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции $F(\cdot)$ (если $F(y_0^\pm) = \pm\infty$, то $F^{-1}(\pm\infty) := y_0^\pm$).

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 1 $c_{12} = 0$ и $b_1 < b_3 < b_2$. Тогда для функций $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$, $y_{23}(\cdot)$ справедливы следующие формулы:

$$y_{12}(x) = c_{13} \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}} \operatorname{sn}(z(x); k), \quad (21)$$

$$y_{13}(x) = c_{13} \operatorname{cn}(z(x); k), \quad (22)$$

$$y_{23}(x) = c_{23} \operatorname{dn}(z(x); k), \quad (23)$$

где

$$z(x) = c_{23} \sqrt{(b_2 - b_1)(b_3 - b_1)} K_2(x), \quad k = \frac{c_{13}}{c_{23}} \sqrt{\frac{b_2 - b_3}{b_3 - b_1}}, \quad (24)$$

$$K_2(x) = \int_0^x \kappa_2(t) dt, \quad a(\cdot) = \kappa_2(\cdot) \gamma(\cdot)^2 + \kappa_1(x) \gamma(\cdot) + \kappa_0(\cdot). \quad (25)$$

Пример 1. Пусть

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i \\ -i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/b \end{pmatrix}, \quad b > 1. \quad (26)$$

Тогда пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, где $a(x) = \gamma(x)^2$, является решением системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & ib \operatorname{sn} x & i \operatorname{cn} x \\ -ib \operatorname{sn} x & 0 & i \operatorname{dn} x \\ -i \operatorname{cn} x & -i \operatorname{dn} x & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где $\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x; k)$, $\operatorname{cn} x = \operatorname{cn}(x; k)$, $\operatorname{dn} x = \operatorname{dn}(x; k)$ и $k = \sqrt{b^2 - 1}$.

Теорема 2. Пусть $n = 4$,

$$b_4 < b_1 < b_2 < b_3, \quad b_1 + b_2 = b_3 + b_4, \quad (28)$$

$$\alpha_3 := \frac{b_3 - b_2}{b_3 - b_1}, \quad \alpha_4 := \frac{b_4 - b_2}{b_4 - b_1}. \quad (29)$$

Пусть далее

$$c_{jk} \in \mathbb{R}, \quad c_{jk} = -c_{kj}, \quad j, k \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (30)$$

$$c_{1k} > 0, \quad k \in \{2, 3, 4\}, \quad (31)$$

$$c_{23} = \sqrt{\alpha_3} c_{13}, \quad c_{24} = -\sqrt{\alpha_4} c_{14}, \quad c_{34} = 0. \quad (32)$$

Далее, положим

$$\beta_3 := \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}, \quad \beta_4 := \frac{b_2 - b_1}{b_4 - b_1}, \quad (33)$$

$$\alpha := \frac{c_{14}}{c_{13}}, \quad \beta := \beta_3 + \beta_4 \alpha^2, \quad (34)$$

$$F(y) := \int_{c_{13}}^y \frac{du}{u \sqrt{c_{12}^2 + \beta(u^2 - c_{13}^2)}}, \quad (35)$$

$$\rho := \sqrt{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)}, \quad (36)$$

$$v(x) := F^{-1}(\rho K_2(x)), \quad (37)$$

где $F^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к функции $F(\cdot)$. Пусть $(y_0^-, y_0^+) \subset \overline{\mathbb{R}}$ — наибольший по включению интервал, который содержит число c_{13} , и выполнено неравенство

$$c_{12}^2 + \beta(y^2 - c_{13}^2) > 0, \quad y_0^- < y < y_0^+. \quad (38)$$

Пусть далее $\kappa_0, \kappa_1 \kappa_2 \in L^1[0, l]$ — вещественные функции и функции $K_1(x), K_2(x)$ определены равенствами $K_j(x) := \int_0^x \kappa_j(t) dt$, $j = 1, 2$, и

$$F(y_0^-) < \rho K_2(x) < F(y_0^+), \quad x \in [0, l]. \quad (39)$$

Тогда пара $\{a(\cdot), \gamma(\cdot)\}$, где $a(x) = \kappa_2(x)\gamma(x)^2 + \kappa_1(x)\gamma(x) + \kappa_0(x)$, $x \in [0, l]$, является решением системы (1) тогда и только тогда, когда при $x \in [0, l]$ выполнены равенства

$$\gamma_{jj}(x) = \gamma_{jj}^+, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (40)$$

$$\gamma_{jk}(x) = i e^{i(b_j - b_k)(K_1(x) + (\gamma_{jj}^+ + \gamma_{kk}^+)K_2(x))} y_{jk}(x), \quad j \neq k, \quad (41)$$

где функции y_{jk} , $j \neq k$ имеют вид

$$y_{12}(x) = \sqrt{c_{12}^2 + \beta(v^2(x) - c_{13}^2)}, \quad (42)$$

$$y_{13}(x) = v(x), \quad (43)$$

$$y_{14}(x) = \alpha v(x), \quad (44)$$

$$y_{23}(x) = \sqrt{\alpha_3} v(x), \quad (45)$$

$$y_{24}(x) = -\sqrt{\alpha_4} \alpha v(x), \quad (46)$$

$$y_{34}(x) = 0, \quad (47)$$

$$y_{kj}(x) = y_{jk}(x), \quad 1 \leq j < k \leq 4. \quad (48)$$

Следствие 2. В условиях теоремы (3) положим $c_{12} = 0$, что определяет вид матрицы C в (3) таким образом:

$$iC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \\ \overline{c_{13}} & \overline{c_{23}} & 0 & 0 \\ \overline{c_{14}} & \overline{c_{24}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для функций $y_{12}(\cdot)$, $y_{13}(\cdot)$ справедливы представления

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\beta}\tan(z(x)), \quad \beta > 0; \quad (49)$$

$$y_{13}(x) = \frac{c_{13}}{\cos(z(x))}, \quad \beta > 0; \quad (50)$$

или

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\beta}, \quad \beta < 0; \quad (51)$$

$$y_{13}(x) = 0; \quad (52)$$

или

$$y_{12}(x) = c_{13}\sqrt{\beta}\operatorname{th}(z(x)), \quad \beta < 0; \quad (53)$$

$$y_{13}(x) = \frac{c_{13}}{\operatorname{ch}(z(x))}, \quad \beta < 0; \quad (54)$$

где

$$z(x) = c_{13}\rho\sqrt{\beta}K_2(x). \quad (55)$$

Пример 2. Пусть

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2i & i \\ 0 & 0 & \sqrt{2}i & -\sqrt{2}i \\ -2i & -\sqrt{2}i & 0 & 0 \\ -i & \sqrt{2}i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \quad b > 0. \quad (56)$$

Тогда пара $\{a(x), \gamma(x)\}$, где $a(x) = \gamma^2(x)$ является решением системы (1) тогда и только тогда, когда

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\operatorname{tg}(2bx) & \frac{2}{\cos(2bx)} & \frac{1}{\cos(2bx)} \\ -\sqrt{2}\operatorname{tg}(2bx) & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & -\frac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} \\ -\frac{2}{\cos(2bx)} & -\frac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\cos(2bx)} & \frac{\sqrt{2}}{\cos(2bx)} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

1. Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. – Харьков: Изд-во ХНУ им. В. Н. Каразина, 2003. – 342 с.
2. Золотарев В. А. Спектральный анализ несамосопряженных коммутативных систем операторов и нелинейные дифференциальные уравнения // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. Респ. сб. – 1983. – Вып. 40. – Р. 68–71.
3. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 7. – С. 965–994.
4. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1971. – 160 с.

5. Лунев А. А., Олейник Е. В. Об одном классе систем уравнений типа Лакса // Укр. мат. вісн. – 2013. – 10, № 4. – С. 507–531.

*Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк
Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина*

Поступило в редакцию 15.07.2014

А. А. Луньов, О. В. Олійник

Про один клас систем рівнянь типу Лакса

Досліджено нелінійну систему рівнянь типу Лакса, яка знаходиться в основі побудови трикутних моделей для комутативних систем лінійних несамоспряжених обмежених операторів. Описано деякі її розв'язки при $n = 3, 4$. Наведено приклади подання загального розв'язку в термінах спеціальних функцій (еліптичних).

A. A. Lunyov, E. V. Oliynyk

On a class of systems of equations of the Lax type

The non-linear system of equations of the Lax type is investigated. It is a basis of the triangular models for commutative systems of linear non-self-adjoint operators. In some cases, the complete description of solutions of this system is found.