

doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.05.034>

УДК 539.421

**М.Ф. Селіванов**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net

## Розв'язання задачі про крайову тріщину з зоною зчеплення шляхом регуляризації сингулярного інтегрального рівняння

Представлено членом-кореспондентом НАН України В.М. Назаренком

Розглянуто крайову тріщину нормального відриву в напівнескінченній площині. Зону передруйнування біля фронту тріщини описано за допомогою моделі зони зчеплення, в основі якої лежить нерівномірний закон зчеплення—відриву. Сингулярне рівняння з узагальненим ядром Коші, що дає розв'язок задачі, після регуляризації розв'язується колокаційним методом, який дозволив врахувати зв'язаність зчеплення та відриву. Представлений алгоритм розв'язання задачі також враховує умову плавності змикання берегів. Числовий приклад побудовано в умовах граничного стану для степеневого закону зчеплення—відриву з ділянкою зміцнення. Встановлено, що регуляризація при розв'язанні задачі практично не впливає на значення критичного навантаження.

**Ключові слова:** крайова тріщина, модель зони зчеплення, інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші, умова плавності змикання берегів тріщини.

У дослідженні [1], де інтегральне рівняння з узагальненим ядром Коші, що визначає розв'язок задачі про крайову тріщину, було розв'язано без регуляризації. Це призвело до осциляції розв'язку за певних законів зчеплення—відриву (ЗЗВ).

Розглянемо задачу про стан граничної рівноваги крайової тріщини в напівнескінченній площині за наявності зони передруйнування біля її фронту (рис. 1, а, де  $\lambda$  і  $\beta$  – вершини фізичної та фіктивної тріщин відповідно,  $\Delta(x)$  – розкриття тріщини). Тріщина розташована вздовж нормалі до границі півплощини, розподілене розтягувальне навантаження прикладене на значній відстані від тріщини вздовж нормалі до її площини.

Розв'язок задачі має вигляд (введені позначення ілюструє рис. 1, б)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\beta} K(\xi, \tau) \varphi(\tau) d\tau = L\psi(\xi), \quad 0 < \xi < \beta,$$
$$\psi(\xi) = \sigma_{\infty} - \sigma_{\max} \bar{T}[\bar{\Delta}(\xi)]H(\xi - \lambda), \quad \Delta(\xi) = \int_{\xi}^{\beta} \varphi(\tau) d\tau, \quad (1)$$
$$\Delta'(\beta) = 0,$$

© М.Ф. Селіванов, 2019

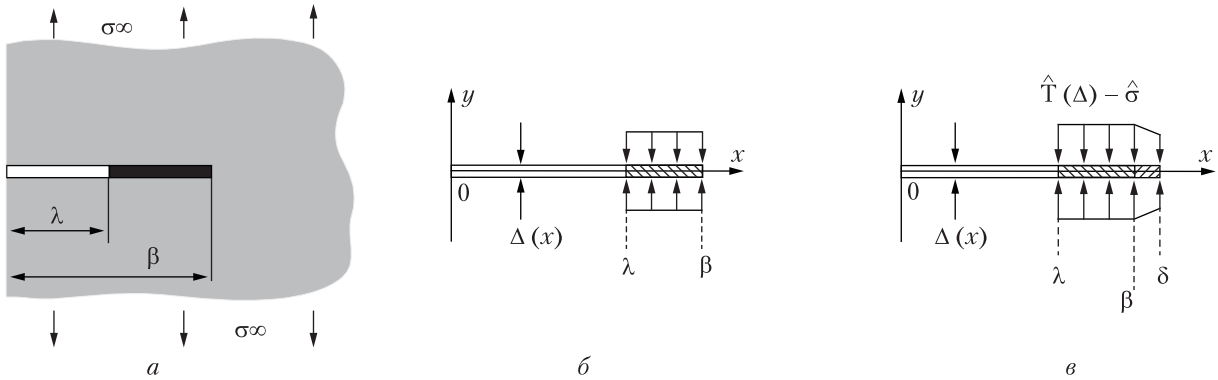


Рис. 1

$L = (\kappa + 1)/(2\mu)$  — пружна стала ( $\kappa$  — стала Колосова,  $\mu$  — модуль зсуву);  $H$  — функція Гевісайда;  $\bar{T}(\Delta)$  — заданий ЗЗВ;  $\bar{\Delta} = \Delta/\Delta_{\max}$  — безрозмірний відрив; міцність зчеплення  $\sigma_{\max}$  та критичний відрив  $\Delta_{\max}$  є фізичними параметрами моделі,

$$K(\xi, \tau) = \frac{1}{\tau - \xi} - h(\xi, \tau),$$

$$h(\xi, \tau) = \sum_{r=0}^2 d_r \xi^r \frac{\partial^r}{\partial \xi^r} \frac{1}{\tau + \xi}, \quad d = \{1, 6, 2\}.$$

Зауважимо, що окрім функції  $\phi$  в задачі (1) невідомою є і величина  $\beta$ . При дослідженні стану граничної рівноваги у визначальну систему (1) необхідно додати рівняння  $\Delta(\lambda) = \Delta_{\max}$ .

Форму функції  $h$  обрано для зручності подальшого аналізу. Більш звична форма запису цієї функції така:

$$h(\xi, \tau) = \frac{\tau^2 - 4\xi\tau - \xi^2}{(\tau + \xi)^3}.$$

Розділимо перше рівняння (1) на  $L\sigma_{\max}$ ; після заміни  $\tau = \beta t$ ,  $\xi = \beta x$ ,  $t, x \in [0, 1]$  отримаємо

$$B(f, x) = \tilde{\sigma}(x), \quad (2)$$

$$f(t) = \frac{\phi(\beta t)}{L\sigma_{\max}}, \quad \tilde{\sigma}(x) = \frac{\psi(\beta x)}{\sigma_{\max}}, \quad B(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 K(x, t) f(t) dt.$$

Для регуляризації (2) розв'яжемо рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)}{t-x} dt = y(x), \quad (3)$$

вважаючи функцію

$$y(x) = \tilde{\sigma}(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 h(x, t) f(t) dt$$

відомою. Розв'язок рівняння (3) є добре відомим [2]:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi \tilde{X}(x)} \int_0^1 \frac{\tilde{X}(t) y(t)}{t-x} dt, \quad \tilde{X}(t) = \frac{(1-t)^{1/2}}{t^{1/2}}.$$

Підставимо

$$y(t) = \tilde{\sigma}(t) + \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 h(t, s) f(s) ds$$

у вираз для  $f(x)$ . Враховуючи, що

$$\frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \frac{\tilde{X}(t) h(t, s)}{t-x} dt = -\frac{R(x, s)}{s^{1/2}(1+s)^{3/2}},$$

$$R(x, s) = 5 - 7x + s + R_s(x, s), \quad R_s(x, s) = \sum_{r=0}^2 c_r(x) x^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \frac{1}{s+x},$$

$$c(x) = \{17x^2 - 19x + 3.5, \quad 2(7x - 4)(x - 1), \quad 2(x - 1)^2\},$$

отримаємо

$$f(x) = \frac{1}{\tilde{X}(x)} \left\{ \tilde{P}(x) + \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \frac{R(x, s) f(s)}{s^{1/2}(1+s)^{3/2}} ds \right\}, \quad (4)$$

де

$$\tilde{P}(x) = -\frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \frac{\tilde{X}(t) \tilde{\sigma}(t)}{t-x} dt.$$

Зазначимо, що за сталої силової функції  $\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}_0$  матимемо  $\tilde{P}(x) = \tilde{\sigma}_0$ . Ядро  $R$  можна подати у вигляді

$$R(x, s) = \frac{s^2(2s^2 + 10s + 7) - 2xs(4s^2 + 4s + 1) - x^2(2s^2 + 2s + 1)}{2(s+x)^3}.$$

Складова цього ядра  $R_s(x, t)$ , яку називають узагальненим ядром Коші, має стаціонарну сингулярність у лівому кінці інтервалу  $[0, 1]$ .

Перепишемо (4) у вигляді

$$\tilde{X}(x) f(x) - \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \frac{R(x, t) f(t)}{t^{1/2}(1+t)^{3/2}} dt = \tilde{P}(x).$$

Це рівняння можна подати у формі

$$a(x) u(x) - \frac{1}{\pi_0} \int_0^1 R(x, t) u(t) dt = \tilde{P}(x), \quad (5)$$

де

$$a(x) = (1-x)^{1/2}(1+x)^{3/2}, \quad u(x) = \frac{f(x)}{x^{1/2}(1+x)^{3/2}}.$$

Введемо вагову функцію  $x^b$  в (5) та запишемо характеристичне рівняння для визначення  $b$  (див. рівняння (25b) в [3]):

$$1 + \frac{1}{\sin \pi b} \{c_0(0) + c_1(0)b + c_2(0)b(b-1)\} = 0,$$

звідси  $b = -1/2$ . Таким чином, щоб виділити сингулярність у рівнянні (5) невідому функцію треба шукати у вигляді  $u(x) = q(x)/x^{1/2}$ , де  $q$  — регулярна функція. З метою врахування цього висновку та сингулярності в правому кінці інтервалу  $[0, 1]$  шукатиме невідому функ-

цію у вигляді

$$u(x) = \frac{q(x)}{\hat{X}(x)}, \quad \hat{X}(x) = [x(1-x)]^{1/2}.$$

Для врахування умови плавності змикання берегів (третій рядок в (1)) збільшимо дозину фіктивної тріщини з  $\beta$  до  $\delta$  та перепишемо силову функцію у вигляді (рис. 1, в)

$$\tilde{\sigma}(x) = \bar{\sigma}_\infty - \hat{T}[\bar{\Delta}(x)]H(x - \lambda/\delta) + \hat{\sigma}(x)H(x - \beta/\delta),$$

де  $\bar{\sigma}_\infty = \sigma_\infty/\sigma_{\max}$ ,  $\hat{T}(\bar{\Delta})$  – подовжене на від'ємний відрив зчеплення (безрозмірне)

$$\hat{T}(\bar{\Delta}) = \begin{cases} \bar{T}(\bar{\Delta}), & \bar{\Delta} \geq 0, \\ P(\bar{\Delta}), & \bar{\Delta} < 0, \end{cases} \quad \bar{\Delta}(x) = w \int_{x/\delta}^1 f(t) dt, \quad w = \frac{\delta L \sigma_{\max}}{\Delta_{\max}}, \quad (6)$$

допоміжне напруження  $\hat{\sigma}(x)$  визначається з умови  $\bar{\Delta}(x) \geq 0$ ,  $\beta/\delta \leq x < 1$ ; геометричний параметр  $\delta$  обирається таким чином, щоб напевне виконувалась умова  $\beta < \delta$ .

Рівняння (5) набуде вигляду

$$A(q, x) = \tilde{P}(x), \quad (7)$$

де ліва частина

$$A(q, x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{x^{1/2}} q(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^1 R(x, t) \frac{q(t)}{\hat{X}(t)} dt,$$

$$q(t) = \frac{f(t)}{\omega_1(t)}, \quad \omega_1(t) = \frac{(1+t)^{3/2}}{(1-t)^{1/2}},$$

а силова функція

$$\tilde{P}(x) = \bar{\sigma}_\infty - \bar{P}(x) + \hat{P}(x),$$

$$\bar{P}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\lambda/\delta}^1 \frac{\tilde{X}(t) \hat{T}[\bar{\Delta}(x)]}{t-x} dt, \quad \hat{P}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\beta/\delta}^1 \frac{\tilde{X}(t) \hat{\sigma}(t)}{t-x} dt. \quad (8)$$

Невідому регулярну функцію  $q$  визначатимемо з (7) у кусково-лінійній формі. Для знаходження параметрів функції  $q$  перепишемо ліву частину (7) у формі

$$A(q, x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{x^{1/2}} q(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n J_k(x) q_k,$$

де  $q_k$  – значення шуканої функції  $q(x)$  в квадратурних точках  $t_k$ ,

$$J_1(x) = t_2 Q'_1(x) - S'_1(x), \quad J_n(x) = -t_{n-1} Q'_{n-1}(x) + S'_{n-1}(x),$$

$$J_k(x) = t_{k+1} Q'_k(x) - t_{k-1} Q'_{k-1}(x) - S'_k(x) + S'_{k-1}(x), \quad k = 2, \dots, n-1,$$

$$Q'_k(x) = \frac{Q(x, t_{k+1}) - Q(x, t_k)}{\Delta t_k}, \quad S'_k(x) = \frac{S(x, t_{k+1}) - S(x, t_k)}{\Delta t_k},$$

$$Q(x, t) = \int \frac{R(x, t)}{\hat{X}(t)} dt, \quad S(x, t) = \int \frac{tR(x, t)}{\hat{X}(t)} dt.$$

Введемо позначення

$$I_{kr}(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \int \frac{t^k dt}{\hat{X}(t)(t+x)}, \quad k=0, 1, \quad r=0, 1, 2$$

та обчислимо наявні в ньому інтеграли:

$$I_{00}(x, t) = -\frac{2}{[x(1+x)]^{1/2}} \operatorname{arctg} \left[ \frac{x^{1/2} \tilde{X}(t)}{(1+x)^{1/2}} \right],$$

$$I_{01}(x, t) = -\frac{1}{x+1} \left[ \left( x + \frac{1}{2} \right) I_{00}(x, t) + \frac{\hat{X}(t)}{t+x} \right],$$

$$I_{02}(x, t) = \frac{1}{(x+1)^2} \left[ \left( 2x^2 + 2x + \frac{3}{4} \right) I_{00}(x, t) + \frac{8x^2 + 6tx + 3t + 5x}{2(t+x)^2} \hat{X}(t) \right];$$

$$I_{10}(x, t) = -xI_{00}(x, t) - I(t), \quad I(t) = 2 \operatorname{arctg} \tilde{X}(t),$$

$$I_{11}(x, t) = \frac{x}{1+x} \left[ -\frac{1}{2} I_{00}(x, t) + \frac{1}{t+x} \hat{X}(t) \right],$$

$$I_{12}(x, t) = \frac{x}{(1+x)^2} \left[ \left( x + \frac{1}{4} \right) I_{00}(x, t) - \frac{4x^2 + 2tx - t + x}{2(t+x)^2} \hat{X}(t) \right].$$

Тоді

$$Q(x, t) = \left( 7x - \frac{11}{2} \right) I(t) - \hat{X}(t) + \sum_{r=0}^2 c_r(x) I_{0r}(x, t),$$

$$S(x, t) = \left( 7x - \frac{23}{4} \right) \left\{ \frac{1}{2} I(t) + \hat{X}(t) \right\} - \frac{1}{2} t \hat{X}(t) + \sum_{r=0}^2 c_r(x) I_{1r}(x, t).$$

Неважко переконатись, що  $S(x, t_k)$  ( $k=1, \dots, n$ ) і  $Q(x, t_k)$  ( $k=2, \dots, n$ ) є обмеженими при  $x \rightarrow 0$ , а

$$Q(x, t_1) = -\frac{\pi}{x^{1/2}} + O(1),$$

отже

$$J_1(x) = \frac{\pi}{x^{1/2}} + O(1), \quad J_k(x) = O(1), \quad k=2, \dots, n.$$

В точках колокації  $x_m$  (які збігаються з квадратурними точками)

$$A(q, x_m) = \sum_{k=1}^n j_{mk} q_m, \quad j_{mk} = J_k(x_m) + \begin{cases} 0, & m=1, \\ \frac{(1+x_m)^{3/2}}{x_m^{1/2}} \delta_{mk}, & m>1, \end{cases}$$

де  $\delta_{mk}$  — символ Кронекера.

Права частина (7) міститиме вираз (див. (8))

$$\bar{P}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\lambda/\delta}^1 \frac{\tilde{X}(t) \hat{T}[\bar{\Delta}(t)]}{t-x} dt, \quad \bar{\Delta}(t) = w \int_{t/\delta}^1 \omega_1(s) q(s) ds, \quad (9)$$

отримати квадратуру якого є досить складним завданням. Замість цього вважатимемо функцію  $\hat{T}[\bar{\Delta}(x)] - \hat{\sigma}(x)$  ( $\lambda < x < \delta$ ) лінійною на кожному квадратурному інтервалі, тоді

$$\tilde{P}(x) = \bar{\sigma}_\infty - \sum_{k=1}^{n-p} Z_k(x)(\bar{\sigma}_k - \hat{\sigma}_k), \quad \bar{\sigma}_k = \hat{T}[\bar{\Delta}(x_{p+k})], \quad (10)$$

$$Z_1(x) = T_1'(x) - Q_1(x), \quad Z_n(x) = -T_{n-1}'(x) + Q_n(x),$$

$$Z_k(x) = T_k'(x) - T_{k-1}'(x), \quad k = 2, \dots, n-1; \quad (11)$$

$$Q_k(x) = Q(x, t_k), \quad T_k'(x) = \frac{T_{k+1}(x) - T_k(x)}{t_{k+1} - t_k}, \quad T_k(x) = T(x, t_k);$$

$$Q(x, t) = \tilde{X}(x) \ln \left| \frac{\tilde{X}(t) - \tilde{X}(x)}{\tilde{X}(t) + \tilde{X}(x)} \right| + I(t),$$

$$T(x, t) = \tilde{Q}(x, t) + \frac{1}{2}I(t) - \hat{X}(t),$$

$$\tilde{Q}(x, t) = (t-x)Q(x, t) = \begin{cases} 0, & x=t, \\ \pi x, & t=0, \\ 2\hat{X}(t) - tI(t), & x=0. \end{cases}$$

Квадратура для  $\bar{\Delta}(x)$ :

$$\bar{\Delta}(x) = \omega Vq, \quad x = \{x_1, \dots, x_n\}^T,$$

де матриця  $V$  наведена в [1], причому у виразах (6)–(7) вказаної роботи функцію  $\omega$  треба змінити на  $\omega_1$ . Необхідні інтеграли

$$R(t) = \frac{3}{2}U(t) - \left(\frac{1}{2}t + 2\right)Y(t),$$

$$G(t) = \left(\frac{3}{2}t - 1\right)U(t) - \frac{1}{6}(t^2 + 6t - 10)Y(t),$$

де

$$U(t) = 2 \arctg \alpha^{-1}(t), \quad \alpha(t) = \frac{(1-t)^{1/2}}{(1+t)^{1/2}}, \quad Y(t) = (1-t^2)^{1/2}.$$

Дискретизація рівняння (7) набуває вигляду

$$Jq = \bar{\sigma}_\infty \mathbf{1} - Z[\hat{T}(\omega Vq) - \hat{\sigma}], \quad (12)$$

де  $\mathbf{1}$  –  $n \times 1$  вектор-стовпець одиниць,

$$J = [j_{mk}], \quad m, k = 1, \dots, n,$$

$$Z = [z_{mk}], \quad z_{mk} = Z_m(x_k), \quad m = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n-p,$$

$$q = \{q_1, \dots, q_{n-s}, \underbrace{0, \dots, 0}_s\},$$

$$\hat{T}(\omega Vq) = \{\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_{n-p}\}, \quad \bar{\sigma}_k = \hat{T}(\omega V_{p+k}q),$$

$$\hat{\sigma} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{n-p-s}, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_s\},$$

елементи вектора-рядка  $\mathbf{V}_k$  є елементами  $k$ -го рядка матриці  $V$ , індекс  $p$  відповідає квадратурній точці  $x_p = \lambda/\delta$ .

Нелінійна система (12) містить  $n$  невідомих:  $n-s$  ненульових компонент вектора  $\mathbf{q}$  та  $s$  ненульових компонент вектора  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ . Щоб задовольнити умову плавності змикання берегів необхідно вибрати індекс  $s$  таким чином, щоб для відповідного розв'язку системи (12) виконувалась нерівність

$$\mathbf{V}_{n-s}\mathbf{q} \geq 0.$$

Положення вершини зони зчеплення визначається з точністю до  $\Delta t$ :

$$\beta = x_{n-s}.$$

При дослідженні стану граничної рівноваги у визначальну систему (12) необхідно включити рівняння, яке відповідає критерію руйнування

$$w\mathbf{V}_p\mathbf{q} = 1$$

та додає в систему одну невідому  $\sigma_\infty = \sigma_\infty^*$ .

У числовому прикладі буде визначено напружено-деформований стан за умов саме граничного стану. З огляду на те, що відповідно до використаного ЗЗВ, максимальному відриву відповідатиме нульове зчеплення, матиме  $\hat{T}[\bar{\Delta}(x_p)] = 0$ , що враховано в (10).

Напруження на контурі тріщини визначаються інтегралом

$$\sigma(x) = -\frac{L\sigma_{\max}}{\pi} \int_0^1 K(x,t)w_1(t)q(t)dt = -\frac{L\sigma_{\max}}{\pi} \sum_{k=1}^n q_k J_k(x),$$

функції  $J_k(x)$  визначаються за схемою (11), де треба покласти

$$\begin{aligned} Q(x,t) &= \hat{Q}(x,t) + \check{Q}(x,t), \\ \hat{Q}(x,t) &= \int \frac{w_1(t)}{t-x} dt = \omega_1(x) \ln \left| \frac{\alpha(x) - \alpha(t)}{\alpha(x) + \alpha(t)} \right| + (x+2)U(t) - Y(t), \\ \check{Q}(x,t) &= \int h(x,t)w_1(t)dt = \sum_{r=0}^2 d_r x^r \hat{I}_r(x,t); \end{aligned} \tag{13}$$

функції

$$\hat{I}_r(x,t) = \frac{\partial^r}{\partial x^r} \int \frac{w_1(t)}{t+x} dt$$

після інтегрування набувають вигляду

$$\begin{aligned} \hat{I}_0(x,t) &= \alpha(x)W(x,t)(1-x) + (2-x)U(t) - Y(t), \\ \hat{I}_1(x,t) &= -\alpha(x)W(x,t) \frac{x+2}{x+1} - U(t) + \frac{\alpha^2(x)}{x+t} Y(t), \\ \hat{I}_2(x,t) &= \frac{1}{x+1} \left( \frac{3W(x,t)}{\alpha(x)(x+1)^2} - \left( \frac{x+4}{x+1} + \frac{1-x}{x+t} \right) \frac{Y(t)}{x+t} \right), \end{aligned}$$

де

$$W(x,t) = \ln \frac{1 - \alpha(x)\alpha(t)}{1 + \alpha(x)\alpha(t)}.$$

Випишемо другу визначальну функцію співвідношень (11):

$$T(x, t) = \hat{T}(x, t) + \check{T}(x, t),$$

$$\hat{T}(x, t) = \frac{x+1}{\alpha(x)}(t-x) \ln \left| \frac{\alpha(t) - \alpha(x)}{\alpha(t) + \alpha(x)} \right| + [(x+2)t - (x+1)^2 - \frac{1}{2}]U(t) + (x+2 - \frac{1}{2}t)Y(t),$$

$$\check{T}(x, t) = \int \check{Q}(x, t) dt = \sum_{r=0}^2 d_r x^r \check{I}_r(x, t).$$

Функції  $\check{I}_r(x, t) = \int \hat{I}_r(x, t) dt$  після інтегрування приймають вигляд

$$\check{I}_0(x, t) = \alpha(x)W(x, t)(1-x)(t+x) + [(2-x)t - (1-x)^2 - \frac{1}{2}]U(t) + (2-x - \frac{1}{2}t)Y(t),$$

$$\check{I}_1(x, t) = \alpha(x)W(x, t) \left[ 1-x - \frac{x+2}{x+1}(t+x) \right] + (2(1-x) - t)U(t) - \frac{2x}{x+1}Y(t),$$

$$\check{I}_2(x, t) = \alpha(x)W(x, t) \frac{3t - 4 + x + 4x^2 + 2x^3}{(x+1)^2(1-x)} - 2U(t) + \left( \frac{1-x}{x+t} - \frac{x+4}{x+1} \right) \frac{Y(t)}{x+1}.$$

Окремо випишемо функції  $Q$  з (11):

$$Q_1(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \left[ -\frac{2x(3x^3 + 4x^2 - 4x - 8)}{Y(x)} \ln \frac{1-\alpha(x)}{1+\alpha(x)} + \right.$$

$$\left. + 4(\pi x^3 + (2\pi + \frac{3}{2})x^2 + (\pi + 2)x - 1) \right], \quad Q_n(x) = 8\pi x.$$

Складові функції  $Q_1$  (див. (13)) є сингулярними, але, використовуючи асимптотичні властивості, знайдемо  $Q_1(0) = -4$ ,  $Q_1(1) = 4\pi$ . Також неважко отримати асимптотичні властивості функції  $T_k(x)$ .

Числовий приклад побудуємо для ЗЗВ із ділянкою зміцнення

$$\bar{T}(\bar{\Delta}) = (\bar{\sigma}_l \bar{\Delta} + \bar{\sigma}_n)(1 - \bar{\Delta})^2,$$

$$\Delta_{\max} = \frac{12\varphi}{\sigma_{\max}(\bar{\sigma}_l + 4\bar{\sigma}_n)}, \quad \frac{4}{27} \bar{\sigma}_l \left( 1 + \frac{\bar{\sigma}_n}{\bar{\sigma}_l} \right)^3 = 1.$$

На рис. 2 проілюстрована безрозмірна щільність розкриття  $q(x)$  (а), відносні зчеплення  $\hat{T}[\bar{\Delta}(x)] - \hat{\sigma}(x)$  та відрив  $\bar{\Delta}(x)$  (б) при  $\delta = 1$  см,  $\bar{\sigma}_n = 0,95$ ,  $\bar{\sigma}_l = 2,8406$ ,  $E = 40$  ГПа,  $\varphi = 200$  Н/м,  $\sigma_{\max} = 35$  МПа,  $n = 101$  (параметр дискретизації). Штриховою лінією на рис. 2, б зображена дискретизована величина  $\hat{T}[\bar{\Delta}(x)] - \hat{\sigma}(x)$  (напруження на лінії тріщини [4, 5, 1]), яка демонструє осциляцію відносно  $\sigma(x)$  на ділянці  $\beta < x < \delta$ . Але функція  $\hat{\sigma}(x)$  є допоміжною і не несе фізичного змісту. Натомість щільність розкриття  $q(x)$  не має осциляції на відміну від розв'язку задачі без регуляризації.

Критичне значення зовнішнього навантаження  $\sigma_{\infty}^* = 0,6021\sigma_{\max}$ . Цей параметр граничної рівноваги отримано на рівні  $0,6023\sigma_{\max}$  при розв'язанні задачі без регуляризації [1].

Таким чином, в роботі побудовано та проілюстровано прикладом числово-аналітичний метод теорії тріщин в рамках моделі зони зчеплення для випадку крайової тріщини. Інте-



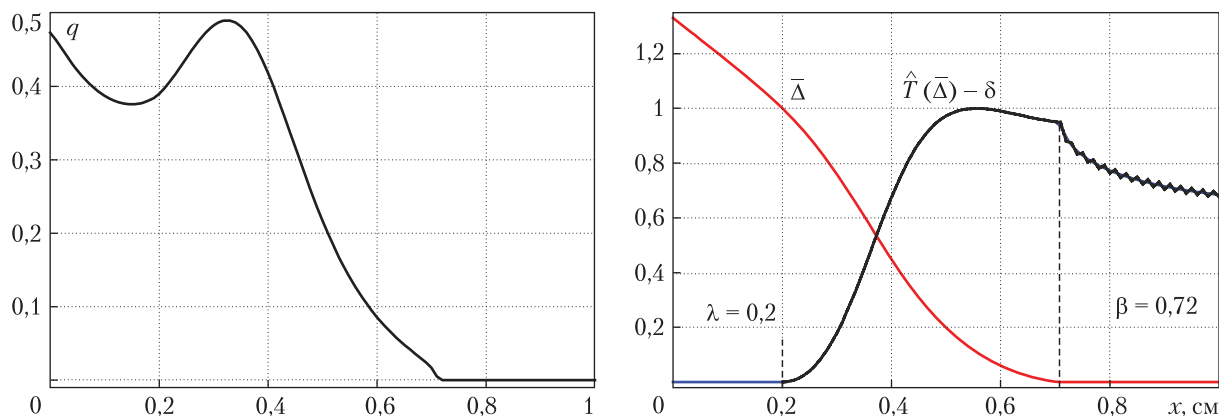


Рис. 2

гральне рівняння з узагальненим ядром Коші, яке дає розв'язок задачі, після регуляризації розв'язано методом колокацій. Квадратурні формули побудовано з урахуванням стаціонарної сингулярності зазначеного ядра. Використання регуляризації дозволило отримати фізично коректний (без осциляцій) розв'язок для щільності розкриття (функція  $\varphi$  в (1)). Встановлено, що обидві процедури розв'язання (з регуляризації та без неї) дають дуже близькі значення параметра граничної рівноваги, що за рахунок простоти реалізації робить числово-аналітичний алгоритм, представлений в [1], більш привабливим.

## ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Селіванов М.Ф. Крайова тріщина із зоною зчеплення. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2019. № 3. С. 46–54. doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.46>
2. Muskhelishvili N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen: Noordhoff, 1953.
3. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 1999. 45. P. 1457–1470.
4. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O. A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.* 2018. 212. № 1. P. 113–121.
5. Selivanov M.F., Chornoivan Y.O., Kononchuk O.P. Determination of crack opening displacement and critical load parameter within a cohesive zone model. *Continuum Mech. Thermodyn.* 2018. doi: <http://doi.org/10.1007/s00161-018-0712-0>

Надійшло до редакції 23.01.2019

## REFERENCES

1. Selivanov, M. F. (2019). An edge crack with cohesive zone. *Dopov. Nac. acad. nauk Ukr.*, 2019, No. 3: pp. 46–54 (in Ukrainian). doi: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2019.03.46>
2. Muskhelishvili, N. I. (1953). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Groningen: Noordhoff.
3. Savruk, M. P., Madenci, E. & Shkarayev, S. (1999). *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 45, pp. 1457-1470.
4. Selivanov, M. F. & Chornoivan, Y. O. (2018). A semi-analytical solution method for problems of cohesive fracture and some of its applications. *Int. J. Fract.*, 212, 1, pp. 113-121.
5. Selivanov, M. F., Chornoivan, Y. O. & Kononchuk, O. P. (2018). Determination of crack opening displacement and critical load parameter within a cohesive zone model. *Continuum Mech. Thermodyn.* doi: <http://doi.org/10.1007/s00161-018-0712-0>

Received 23.01.2019

М.Ф. Селиванов

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев

E-mail: mfs@ukr.net

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРАЕВОЙ ТРЕЩИНЕ С ЗОНОЙ СЦЕПЛЕНИЯ  
ПРИ ПОМОЩИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрено крайовую трещину нормального отрыва в полубесконечной плоскости. Зону предразрушения у фронта трещины описано при помощи модели зоны сцепления, в основе которой лежит неравномерный закон сцепления–отрыва. Сингулярное интегральное уравнение с обобщенным ядром Коши после регуляризации решается методом коллокаций, который позволил учесть связанность сцепления и отрыва. Построенный алгоритм решения задачи также учитывает условие плавности смыкания берегов. Числовой пример построен в условиях предельного состояния для степенного закона сцепления–отрыва с участком упрочнения. Установлено, что регуляризация при решении задачи практически не влияет на значение критической нагрузки.

**Ключевые слова:** *краевая трещина, модель зоны сцепления, интегральное уравнение с обобщённым ядром Коши, условие плавности смыкания берегов трещины.*

M.F. Selivanov

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kiev

E-mail: mfs@ukr.net

SOLVING A PROBLEM ON AN EDGE CRACK WITH COHESIVE ZONE  
BY THE REGULARIZATION OF A SINGULAR INTEGRAL EQUATION

An edge mode I crack in a semiinfinite plane is considered. The fracture zone at the front of the crack is modeled with the use of the cohesive zone model, which is based on the non-uniform traction-separation law. The singular integral equation with a generalized Cauchy kernel is solved by the collocation method after the regularization, using the method allowing us to consider the coupling of traction and separation. The constructed algorithm for solving the problem also includes the condition of smooth crack closure. The numeric example is built, by meeting the limiting equilibrium condition for the power traction–separation law with a hardening segment. It is established that the regularization in solving the problem has no effect on the value of critical loading.

**Keywords:** *edge crack, cohesive zone model, integral equation with a generalized Cauchy kernel, condition of smooth crack closure.*