<https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.018>

УДК 517.53

В.В. Савчук¹, <https://orcid.org/0000-0002-6713-4471>

М.В. Савчук²

¹ Інститут математики НАН України, Київ

² НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”

E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

Екстремальна задача для інваріантних диференціальних операторів на класі інтегралів типу Коші

Представлено членом-кореспондентом НАН України О.А. Бойчуком

Диференціальні оператори $D_1(f)(z) = (1 - |z|^2) \partial f(z) / \partial z$ і $D_2(f) = D_1^2(f)$ на просторі голоморфних функцій в одиничному крузі $\mathbb{D}$ є інваріантними відносно композицій голоморфних функцій з дробово-лінійними функціями. Вони природним чином виникають у дослідженнях голоморфних функцій із класу Блоха $\mathcal{B}$, який відіграє важливу роль в геометричній теорії функцій комплексної змінної. Відомо, що образи операторів $|D_j(f)|$, $j = 1, 2$, є ліпшицевими функціями відносно псевдогіперболічної метрики $\rho(z, w)$ в одиничному крузі, а саме $\sup_{f \in \mathcal{B}} \|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)\| / \rho(z, w) = 3\sqrt{3} / 2$. У даній роботі розв'язано екстремальну задачу про точне значення величини $\sup_f |D_1(f)(z) - D_2(f)(w)| / \rho(z, w)$, коли f пробігає клас інтегралів типу Коші, який, як добре відомо, є підкласом функцій Блоха.

Ключові слова: голоморфна функція, псевдогіперболічна метрика, клас Блоха, інтеграл типу Коші, ВМОА, екстремальна задача.

Нехай f — функція, голоморфна в одиничному крузі $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Розглянемо диференціальні оператори D_1 і D_2 , які діють на функцію f за правилом

$$D_1(f)(z) = (1 - |z|^2) f'(z),$$

$$D_2(f)(z) = (1 - |z|^2)^2 f''(z) - 2\bar{z}(1 - |z|^2) f'(z).$$

Якщо $z \in \mathbb{D}$ і

$$\mu_z(t) := \frac{t - z}{1 - \bar{t}z}$$

Цитування: Савчук В.В., Савчук М.В. Екстремальна задача для інваріантних диференціальних операторів на класі інтегралів типу Коші. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 4. С. 18–23. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.018>

— перетворення Мебіуса, то $D_j(f)(z) = (f \circ \mu_{-z})^{(j)}(0)$ для $j = 1, 2$. До того ж ці диференціальні оператори є інваріантними в такому сенсі:

$$|D_j(S \circ f \circ \mu_z)| = |D_j(f)| \circ \mu_z, \quad j = 1, 2,$$

де $S(z) = a + bz$, $a, b \in \mathbb{C}$, $|b| = 1$. Зрозуміло також, що образи $|D_j(f)|$ — це субгармонічні функції в крузі $\mathbb{D}$.

Оператори D_1 і D_2 вивчалися в [1, 2] на предмет їх застосувань до голоморфних функцій із класу Блоха $\mathcal{B}$. Нагадаємо, що так називається клас голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f , для яких

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |D_1(f)(z)| \leq 1.$$

Зокрема, в [2] доведено, що для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$\max_{f \in \mathcal{B}} |D_2(f)(z)| = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

а максимум при даному z досягається тільки для функцій вигляду $f = \lambda \mu_z^2 + c$ де $\lambda = \text{const}$, $|\lambda| = 3\sqrt{3}/2$ і $c \in \mathbb{C}$.

У [3] показано, що звуження оператора $|D_1|$ на клас $\mathcal{B}$ породжують ліпшицеві функції відносно псевдогіперболічної метрики

$$\rho(z, w) := \left| \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \right|,$$

тобто якщо $f \in \mathcal{B}$, то для будь-яких $z, w \in \mathbb{D}$

$$\left| |D_1(f)(z)| - |D_1(f)(w)| \right| \leq C \rho(z, w),$$

де C — абсолютна константа (ліпшицева). Зокрема, в [3] показано, що $C \leq 3,31$. Точне значення C (найменша константа серед усіх таких можливих) знайдене в [4]: $C = 3\sqrt{3}/2$.

Оскільки

$$\left| |D_1(f)(z)| - |D_1(f)(w)| \right| \leq |D_1(f)(z) - D_1(f)(w)|,$$

то природно виникає питання: чи будуть значення оператора D_1 на класі $\mathcal{B}$ або на якихось його підкласах ліпшицевими функціями відносно псевдогіперболічної метрики та з якою ліпшицевою константою?

У даній роботі ми частково відповідаємо на це питання, даючи розв'язки екстремальних задач про точні значення та екстремальні функції для величин

$$A(z, w) := \begin{cases} \sup_{f \in \mathcal{K}} \frac{|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)|}{\rho(z, w)}, & z \neq w, \\ \sup_{f \in \mathcal{K}} |D_2(f)(z)|, & z = w, \end{cases}$$

i

$$B(z, w) := \sup_{f \in \mathcal{K}} \frac{\|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)\|}{\rho(z, w)}, \quad z \neq w.$$

Функції f , для яких досягаються відповідні точні межі в $A(z, w)$ і $B(z, w)$, називаються екстремальними.

Зауважимо, що для будь-якого $z \in \mathbb{D}$

$$|D_2(f)(z)| = (1 - |z|^2) \left| \frac{\partial}{\partial z} D_1(f)(z) \right| = \lim_{w \rightarrow z} \frac{|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)|}{\rho(z, w)}.$$

Тому $A(z, w) \rightarrow A(z, z)$ при $w \rightarrow z$, що підтверджує коректність означення величини $A(z, w)$.

У ролі $\mathcal{K}$ розглянемо клас голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій f , що зображуються інтегралами типу Коші

$$f(z) = C(\varphi)(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t)}{1 - \bar{t}z} dm(t),$$

зі щільностями $\varphi: \mathbb{T} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, для яких

$$\text{dist}(\varphi, \overline{H^\infty(\mathbb{T})}) := \inf_{h \in H^\infty(\mathbb{T})} \|\varphi + \bar{h}\| \leq 1,$$

де $H^\infty(\mathbb{T})$ — простір вимірних на $\mathbb{T}$, істотно обмежених функцій $h: \mathbb{T} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, що задовольняють умови

$$\int_{\mathbb{T}} h(t) t^k dm(t) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

наділений нормою $\varphi_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{T}} |\varphi(t)|$ і dm — нормована міра Лебега на колі $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$.

Зауважимо, що $\mathcal{K}$ — це клас функцій з простору ВМОА (див., наприклад, [5], теорема 7.2), що складається з голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, які задовольняють умову

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} |f \circ \mu_z(t) - f(z)|^2 dm(t) < \infty.$$

Легко бачити, що для будь-якої функції $f \in \mathcal{K}$, $f = C(\varphi)$, і $z \in \mathbb{D}$ справджуються співвідношення

$$|f'(z)| = \left| \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(t) \bar{t}}{(1 - \bar{t}z)^2} dm(t) \right| \leq \text{dist}(\varphi, \overline{H^\infty(\mathbb{T})}) \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|1 - \bar{t}z|^2} dm(t) \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

Отже, $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}$. З іншого боку, як це показано в [6] (див. також [5], теорема 9.13), у класі $\mathcal{B}$ існують функції, які належать просторам Гарді H^p при усіх $p > 0$, але які не належать до

простору ВМОА, а отже, не можуть бути зображені інтегралами типу Коші. Тому розв'язки наших задач, взагалі кажучи, не можуть міститися у вищенаведених твердженнях.

Основними результатами роботи є такі теореми.

Теорема 1. Нехай $(z, w) \in \mathbb{D}^2 := \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ і $\arg z = \arg w$. Тоді $A(z, w) = 2$, а екстремальними є виключно функції вигляду $f = \lambda \mu_z \mu_w$, де $\lambda = \text{const}$, $|\lambda| = 1$.

Теорема 2. Виконується рівність

$$\sup_{(z, w) \in \mathbb{D}^2, z \neq w} B(z, w) = 2.$$

Екстремальними є функції $f(t) = \lambda t^2$, де $\lambda = \text{const}$, $|\lambda| = 1$, а точна верхня межа відносно $(z, w) \in \mathbb{D}^2$, $z \neq w$, досягається на будь-якій послідовності точок $(z_n, 0) \in \mathbb{D}^2$, таких, що $z_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Наведемо схему доведення цих тверджень.

Вихідною точкою є така лема, не позбавлена й самостійного інтересу.

Лема 1. Нехай $f \in \mathcal{K}$ і $f = C(\varphi)$. Тоді для будь-яких $(z, w) \in \mathbb{D}^2$

$$D_1(f)(z)(1 - z\bar{w}) = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} (1 - |z|^2)(1 - |w|^2) + (z - w) \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \mu_z \mu_w} |\mu'_z| dm.$$

З леми 1 випливає така формула: для будь-яких $(z, w) \in \mathbb{D}^2$

$$\frac{D_1(f)(z)(1 - z\bar{w}) - D_1(f)(w)(1 - \bar{z}w)}{z - w} = \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \mu_z \mu_w} (|\mu'_z| + |\mu'_w|) dm.$$

Звідси при $\arg z = \arg w$ одержуємо

$$\frac{D_1(f)(z) - D_1(f)(w)}{\frac{z - w}{1 - z\bar{w}}} = \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \mu_z \mu_w} (|\mu'_z| + |\mu'_w|) dm,$$

якщо $z \neq w$, і

$$D_2(f)(z) = 2 \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi \mu_z^2} |\mu'_z| dm,$$

якщо $z = w$.

Безпосередньо з останніх двох формул випливає доводжувана рівність у теоремі 1 та екстремальність функцій $\lambda \mu_z \mu_w$, $|\lambda| = 1$. Доведення того факту, що тільки ці функції є екстремальними ґрунтується на такому твердженні.

Лема 2. Нехай функція $I: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ є внутрішньою, тобто голоморфною в $\mathbb{D}$ і такою, що $\left| \lim_{\rho \rightarrow 1^-} I(\rho t) \right| = 1$ для майже усіх $t \in \mathbb{T}$, а функція $p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ сумовна і невід'ємна на $\mathbb{T}$. Якщо для деякої вимірної на $\mathbb{T}$ функції φ , яка є істотно обмеженою і такою, що $\text{dist}(\varphi, H^\infty(\mathbb{T})) \leq 1$ виконується рівність

$$\left| \int_{\mathbb{T}} \varphi \bar{I} p dm \right| = \int_{\mathbb{T}} p dm,$$

то $\varphi = \lambda I$, $\partial e \lambda = \text{const}$, $|\lambda| = 1$.

Стосовно леми 2 зауважимо такий важливий факт. У [7] і [8, лема 2] показано, що

$$\int_{\mathbb{T}} p dm = \inf_{h \in H_0^1(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} |\bar{I}p + h| dm,$$

де $H_0^1(\mathbb{T})$ — простір сумовних на $\mathbb{T}$ функцій, які задовольняють умови

$$\int_{\mathbb{T}} h(t) t^k dm(t) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

З іншого боку, нескладно помітити, що

$$\max_{\varphi} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi \bar{I}p dm \right| = \int_{\mathbb{T}} p dm,$$

де максимум береться відносно усіх функцій φ , які описано вище. Тому лема 2 є двоїстою до леми 2 у [8], а рівність

$$\max_{\varphi} \left| \int_{\mathbb{T}} \varphi \bar{I}p dm \right| = \inf_{h \in H_0^1(\mathbb{T})} \int_{\mathbb{T}} |\bar{I}p + h| dm$$

є співвідношенням двоїстості.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Bonk M., Minda D., Yanagihara H. Distortion theorems for locally univalent Bloch functions. *J. Anal. Math.* 1996. **69**. P. 73–95. <https://doi.org/10.1007/BF02787103>
2. Bonk M., Minda D., Yanagihara H. Distortion theorems for Bloch functions. *Pac. J. Math.* 1997. **179**. P. 241–261. <https://doi.org/10.2140/pjm.1997.179.241>
3. Ghatage P., Yan J., Zheng D. Composition operators with closed range on the Bloch space. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2000. **129**. P. 2039–2044. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05771-3>
4. Xiong C. On the Lipschitz continuity of the dilation of Bloch functions. *Period. Math. Hung.* 2003. **47**, № 1–2. P. 233–238. <https://doi.org/10.1023/B:MAHU.0000010824.30026.cd>
5. Girela D. Analytic functions of bounded mean oscillation. *Complex function spaces: Proceedings of the Summer School Held* (Mekrijärvi, 30 August — 3 September, 1999). Joensuu: Joensuu yliopistopaino, 2001. P. 61–170.
6. Holland F., Twomey J.B. Explicit examples of Bloch functions in every H^p space, but not in BMOA. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1985. **95**, № 2. P. 227–229. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1985-0801328-5>
7. Савчук В.В. Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій. *Укр. мат. журн.* 2007. **59**, № 8. С. 1047–1067.
8. Савчук В.В., Чайченко С.О., Савчук М.В. Наближення обмежених голоморфних і гармонічних функцій середніми Фейєра. *Укр. мат. журн.* 2019. **71**, № 4. С. 516–542.

Надійшло до редакції 15.06.2021

REFERENCES

1. Bonk, M., Minda, D. & Yanagihara, H. (1996). Distortion theorems for locally univalent Bloch functions. *J. Anal. Math.*, 69, pp. 73-95. <https://doi.org/10.1007/BF02787103>
2. Bonk, M., Minda, D. & Yanagihara, H. (1997). Distortion theorems for Bloch functions. *Pac. J. Math*, 179, pp. 241-261. <https://doi.org/10.2140/pjm.1997.179.241>
3. Ghatage, P., Yan, J. & Zheng, D. (2000). Composition operators with closed range on the Bloch space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129, pp. 2039-2044. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-00-05771-3>

4. Xiong, C. (2003). On the Lipschitz continuity of the dilation of Bloch functions. *Period. Math. Hung.*, 47, No. 1-2, pp. 233-238. <https://doi.org/10.1023/B:MAHU.0000010824.30026.cd>
5. Girela, D. (2001). Analytic functions of bounded mean oscillation. Proceedings of the Summer School Held Complex function spaces, Mekrijärvi, 1999 (pp. 61-170). Joensuu: Joensuu yliopistopaino.
6. Holland, F. & Twomey J. B. (1985). Explicit examples of Bloch functions in every H^p space, but not in BMOA. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95, No. 2. pp. 227-229. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1985-0801328-5>
7. Savchuk, V. V. (2007). Best approximation by holomorphic functions. Application to the best polynomial approximation of classes of holomorphic functions. *Ukr. Math. J.*, 59, No. 8, pp. 1163-1183. <https://doi.org/10.1007/s11253-007-0078-0>
8. Savchuk, V. V., Chaichenko, S. O. & Savchuk, M. V. (2019). Approximation of bounded holomorphic functions by Fejér means. *Ukr. Math. J.*, 71, No. 4, pp. 589-618. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01665-0>

Received 15.06.2021

V.V. Savchuk¹, <https://orcid.org/0000-0002-6713-4471>

M.V. Savchuk²

¹ Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv

² NTU of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnical Institute"

E-mail: savchuk@imath.kiev.ua, maryna1savchuk@gmail.com

AN EXTREMAL PROBLEM FOR THE INVARIANT DIFFERENTIAL OPERATORS ON A CLASS OF CAUCHY-TYPE INTEGRALS

The differential operators $D_1(f)(z) = (1 - |z|^2)\partial f(z)/\partial z$ and $D_2(f) = D_1^2(f)$, defined on the space of holomorphic functions in a unit disk, are invariant with respect to compositions with fractionally linear functions. They arise naturally in studies of holomorphic functions from the Bloch class $\mathcal{B}$, which plays an important role in the geometric theory of functions. It is known that the images of the operators $|D_j(f)|$, $j=1,2$, are Lipschitz functions with respect to the pseudo-hyperbolic metric $\rho(z, w)$ in a unit disk. Namely, we have that $\sup_{f \in \mathcal{B}} \|D_1(f)(z) - D_1(f)(w)\|/\rho(z, w) = 3\sqrt{3}/2$. In this paper, we solve the extremal problem about the exact value of the quantity $\sup_f |D_1(f)(z) - D_2(f)(w)|/\rho(z, w)$, where f runs a class of Cauchy-type integrals, which, as is well known, is a subclass of Bloch functions.

Keywords: holomorphic function, pseudo-hyperbolic metric, Bloch class, integral of the Cauchy type, BMOA, extremal problem.