ДОПОВІДІ НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ



https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.06.015
УДК 517.95

**А.Л. Гуляницький**, https://orcid.org/0000-0001-5269-097X
**Г.В. Сандраков**, https://orcid.org/0000-0001-9133-605X

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
E-mail: andriyhul@gmail.com, gsandrako@gmail.com

# Розв’язність рівнянь у згортках, що виникають при осередненні

*Представлено членом-кореспондентом НАН України С.І. Ляшком*

*Розглядаються початково-крайові задачі для нестаціонарних рівнянь фільтрації в пористих середовищах. Такі задачі моделюють процеси контролю й керування підземними ресурсами і їх можливими забрудненнями. Як моделі пористих середовищ розглядаються періодичні середовища з малим коефіцієнтом мікромасштабності. Наведено твердження про розв’язність і регулярність відповідних осереднених задач у згортках. Ці твердження сформульовано для загальних вхідних даних і неоднорідних початкових умов, і вони узагальнюють класичні результати про розв’язність початково-крайових задач для рівняння теплопровідності. В доведеннях використовуються методи апріорних оцінок і відомий метод Аграновича—Вішика.*

***Ключові слова:*** *початково-крайові задачі, осереднені рівняння, апріорні оцінки, перетворення Лапласа.*

Математичне моделювання динамічних процесів дифузії й фільтрації рідин у пористих середовищах актуальне при плануванні використання підземних ресурсів і пошуку способів очищення таких ресурсів від забруднень. Вивчення таких процесів методами інженерних спостережень на практиці є складним. Реальний спосіб прогнозування і, можливо, оптимізації використання таких ресурсів — це моделювання. Тут будуть розглянуті пористі періодичні середовища, утворені великою кількістю “блоків” з низькою проникністю, розділених пов’язаною системою “розламів” з високою проникністю. Такі середовища природно назвати *слабко пористими*. Врахування структури таких середовищ при моделюванні приводить до рівнянь фільтрації, залежних від малих параметрів, які характеризують мікромасштабність пористого середовища і проникність блоків.

Такі моделі для рівнянь з декількома малими параметрами і періодичними коефіцієнтами досліджувалися в [1—3]. У цих роботах одержано осереднені початково-крайові задачі в згортках, які прийнято називати *моделями з пам’яттю* [4], їх розв’язки наближають розв’язок початкової задачі для слабко пористих середовищ, доведено оцінки точності таких

Цитування: Гуляницький А.Л., Сандраков Г.В. Розв’язність рівнянь у згортках, що виникають при осередненні. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2021. № 6. С. 15—22. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.06.015

наближень. Ці результати одержано за припущення гладкості вхідних даних і однорідних початкових умов. Тут буде перевірено розв'язність таких задач у згортках для загальних вхідних даних і неоднорідних початкових умов.

Інший підхід до моделювання процесів дифузії та фільтрації в пористих середовищах розроблено, наприклад, у книзі [5], де доведено двомасштабну збіжність розв'язків до розв'язування двомасштабних задач. Такі задачі залежать від двох швидких і повільних змінних і тип таких задач незрозумілий. Додаткові відомості про цей підхід і докладну бібліографію також можна знайти в [5]. Набагато загальніші двомасштабні задачі одержано раніше в [6] і [7]. Однак такі задачі також містять швидкі й повільні змінні. У розглянутих тут задачах ці змінні відокремлено і осереднені задачі в згортках залежать тільки від повільних змінних. Для дослідження розв'язності таких задач із пам'яттю в цій роботі, як і в [1—3], буде застосовано метод перетворення Лапласа, розроблений в [8] для дослідження параболічних задач. Представлені в статті результати частково анонсовано в [9].

**Початково-крайові задачі для слабко пористих середовищ.** Нехай для $n \geqslant 2$ задано обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ і функції $f \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$ й $u_0 \in L^2(\Omega)$. Тут і надалі використовуються простори функцій, означення яких наведено, наприклад, у [4]. Нехай $u = u(t,x)$ є розв'язком початково-крайової задачі

$$
\begin{aligned}
&u'_t - \operatorname{div} K^{\varepsilon}(\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,\infty),\\
&u|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,\infty),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

яка залежить від малого параметра $\varepsilon$ наведеним нижче способом.

Нехай $G_1$ відкрита зв'язна 1-періодична (періодична з періодом 1 за кожною з незалежних змінних $x_1, \ldots, x_n$) підмножиною $\mathbb{R}^n$ з локально ліпшіцевою межею, $G_0 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}_1$ — множина з локально ліпшіцевою межею, а

$$
G_1^{\varepsilon} = \varepsilon G_1 = \{\varepsilon x : x \in G_1\}, \qquad G_0^{\varepsilon} = \varepsilon G_0 = \{\varepsilon x : x \in G_0\}.
$$

Отже, множини $G_1$ та $G_0$ зі спільною межею $\partial G_1$ цілком визначаються множинами $Y_1 = G_1 \cap Y$ й $Y_0 = G_0 \cap Y$ з межею $\Gamma_1 = \partial G_1 \cap Y$, де $Y = (0,1)^n$ позначає комірку періодичності. Так задані множини $Y_1$ і $Y_0$ розбивають комірку періодичності $Y$ на дві множини, що відповідають блокам і розламам, розділеним спільною межею $\Gamma_1$.

Множини $G_0^{\varepsilon}$ та $G_1^{\varepsilon}$ для досить малого фіксованого $\varepsilon$ природно визначають пористі середовища з періодичною структурою $\Omega_0^{\varepsilon} = G_0^{\varepsilon} \cap \Omega$ та $\Omega_1^{\varepsilon} = G_1^{\varepsilon} \cap \Omega$, обмежені $\partial\Omega$ — межею множини $\Omega$, на якій і розглядається задача (1). Для визначених у такий спосіб моделей пористих середовищ $\Omega_0^{\varepsilon}$ та $\Omega_1^{\varepsilon}$, які відповідають блокам і розламам в області $\Omega$, залежність коефіцієнтов задачі (1) від параметра $\varepsilon$ задається рівностями

$$
K^{\varepsilon} = \varepsilon^2 K_0 \quad \text{в} \quad \Omega_0^{\varepsilon} \quad \text{і} \quad K^{\varepsilon} = K_1 \quad \text{в} \quad \Omega_1^{\varepsilon},
$$

де сталі матриці $K_0$ і $K_1$ є симетричними й еліптичними. Припускається, що $Y_1$ та $Y_0$ є множинами додатної міри Лебега в $\mathbb{R}^n$. Отже, при малих $\varepsilon$ рівняння задачі (1) вироджується на множині $\Omega_0^{\varepsilon}$, яка моделює блоки. Така залежність від малого параметра й приводить до осередненої задачі в згортках, розв'язки якої наближують розв'язки задачі (1) при малих

$\varepsilon$ відповідно до [1—3]. Для точного формулювання таких осереднених початково-крайових задач знадобляться додаткові означення.

Нехай вектор-функція $N(y)$ є 1-періодичним розв'язком задачі Неймана:

$$-\mathrm{div}_y(K_1\nabla_y N)=\mathrm{div}_y K_1 \quad \text{в} \quad Y_1, \quad -(K_1\nabla_y N,\eta)=(K_1,\eta) \quad \text{на} \quad \Gamma_1,$$

де $\eta$ позначає зовнішню нормаль до межі $\Gamma_1$. Розгляньмо матрицю

$$K=|Y_1|^{-1}\int_{Y_1}(K_1+K_1\nabla_y N(y))dy,$$

де $|Y_1|$ — лебегова міра множини $Y_1$. Відомо [2], що така матриця зі сталими компонентами визначена, симетрична й еліптична.

Нехай $q(t,y)$ є 1-періодичним розв'язком початково-крайової задачі на $Y_0$:

$$q'_t-\mathrm{div}_y(K_0\nabla_y q)=0 \quad \text{в} \quad Y_0\times(0,\infty), \quad q|_{t=0}=1, \quad q|_{\partial Y_0\times(0,\infty)}=0. \tag{2}$$

Відомо [4], що розв'язок цієї задачі існує і функція

$$r(t)=|Y_1|^{-1}\int_{Y_0}q'_t(t,y)dy \tag{3}$$

належить простору $L^1(0,\infty)$ [2].

Осереднена задача в згортках для функції $v=v(t,x)$ має вигляд

$$\begin{aligned} &v'_t-r*(v'_t)-\mathrm{div}K(\nabla v)=f-r*f \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,\infty),\\ &v|_{t=0}=u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad v=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega\times(0,\infty), \end{aligned} \tag{4}$$

де $*$ позначає оператор згортки за $t$, наприклад,

$$r*(v'_t)=\int_0^t r(t-\tau)(v'_\tau(\tau,x))d\tau.$$

Для фіксованого $\varepsilon$ задача (1) має єдиний розв'язок [4]. Розв'язок задачі (4) наближає розв'язок задачі (1) в схожому розумінні [1—3] при малих $\varepsilon$. Отже, наявність слабко пористих блоків в області $\Omega$ моделюється появою "пам'яті" за густиною (коефіцієнта при похідній за часом) в "осередненого" середовища. Тут буде досліджено розв'язність задачі (4) для загальних вхідних даних. Оскільки матриця $K$ в рівнянні задачі (1) є еліптичною, знайдеться лінійне невироджене перетворення координат в області $\Omega$, в якому ця матриця перейде в одиничну, що й припускається надалі. Крім того, для спрощення позначень будемо вважати одиничною матрицю $K_0$ в рівнянні задачі (2).

Основним результатом цієї роботи є таке твердження.

**Теорема 1.** *Для кожного* $f\in L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$ *і* $u_0\in L^2(\Omega)$ *існує єдиний розв'язок* $v\in L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega))$ *задачі (4) та знайдеться така додатна стала* $C$, *що*

$$\|v\|_{L^2(0,\infty;H_0^1(\Omega))}\leqslant C\|f\|_{L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))}+C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

*Крім того,* $v_t' \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$ *і* $v \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ *для додатного* $T$ .

**Перетворення Лапласа й функційні простори.** Для фіксованого $\nu$ простір $L^2_\nu(0,\infty;L^2(\Omega))$ задається як множина функцій з $L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$, для яких є скінченною величина $\| u \|_{L^2_\nu(0,\infty;L^2(\Omega))} = \| e^{-\nu t} u \|_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}$. Остання рівність задає норму простору $L^2_\nu(0,\infty;L^2(\Omega))$, відносно якої він повний [8].

Згідно з [8], під простором $E_\nu(L^2(\Omega))$ будемо розуміти множину функцій $U(\sigma) = U(\sigma_1 + i\sigma_2)$ зі значеннями в $L^2(\Omega)$, неперервних і голоморфних на комплексній півплощині $\mathbb{C}_\gamma = \{\rho \in \mathbb{C} : \sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \sigma_1 > \nu\}$, для яких є скінченною величина

$$\| U \|^2_{E_\nu(L^2(\Omega))} = \int_{-\infty}^{\infty} \| U(\nu + i\sigma_2) \|^2_{L^2(\Omega)} d\sigma_2.$$

Остання рівність визначає норму в просторі $E_\nu(L^2(\Omega))$. У [8] доведено такий варіант теореми Пелі—Вінера.

**Теорема 2.** *Для фіксованого* $\nu$ *перетворення Лапласа*

$$\widehat{u(t)} = \int_0^\infty e^{-\sigma t} u(t) dt = U(\sigma)$$

*відображає* $L^2_\nu(0,\infty;L^2(\Omega))$ *на* $E_\nu(L^2(\Omega))$ *взаємно однозначно та взаємно неперервно.*

Аналогічно будуються простори $E_\nu(H^1_0(\Omega))$ і $E_\nu(H^{-1}(\Omega))$, для яких також виконується аналог теореми 2. Крім того [8], перетворення Лапласа комутує з диференціюванням за просторовими змінними, а оператор згортки за $t$ переводиться перетворенням Лапласа в оператор поточкового множення відносно $\sigma \in \mathbb{C}_\nu$.

Нехай $V = \hat{v}$, $R = \hat{r}$, $Q = \hat{q}$ і $F = \hat{f}$. Застосувавши перетворення Лапласа до (4), одержуємо

$$\sigma(1-R)V - \Delta V = \mathbb{F} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad V|_{\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

де

$$\mathbb{F} = F(1-R) + u_0(1-R). \tag{6}$$

Для фіксованого $\sigma \in \mathbb{C}$ задача (5) є крайовою задачею для еліптичного рівняння з комплексними коефіцієнтами в молодших доданках. Отже, [8] така задача розв'язна для всіх $\sigma \in \mathbb{C}$, крім, можливо, дискретної множини в $\mathbb{C}$. Тут для доведення розв'язності задачі (4) достатньо відокремитися від цієї множини за допомогою апріорних оцінок зі сталими, що не залежать від $\sigma \in \mathbb{C}_0$.

**Апріорні оцінки розв'язків.** Перетворення Лапласа задачі (2) має вигляд

$$\sigma Q - \Delta Q = 1 \quad \text{в} \quad Y_0, \quad Q|_{\partial Y_0} = 0. \tag{7}$$

Домножуючи це рівняння на $\overline{\sigma Q}$, спряжене до нього рівняння на $\sigma Q$, інтегруючи на $Y_0$ й додаючи одержані рівності, одержуємо $\| \sigma Q \|^2_{L^2(Y_0)} + \sigma_1 \| \nabla Q \|^2_{L^2(Y_0)} = Re \int_{Y_0} (\sigma Q) dy.$

Застосовуючи нерівність Коші—Буняковського до правої частини, маємо

$$Re\int\limits_{Y_0}(\sigma Q)\,dy \leqslant (1/2)\,\|\sigma Q\|^2_{L^2(Y_0)} + (1/2)\,|Y_0|.$$

Отже,

$$\|\sigma Q\|^2_{L^2(Y_0)} \leqslant |Y_0|. \tag{8}$$

З означень і рівності (3) випливає, що

$$R\,|Y_1| = \int\limits_{Y_0}(\sigma Q(\sigma, y) - 1)\,dy \tag{9}$$

та $|R|\,|Y_1| \leqslant \int\limits_{Y_0}|\sigma Q - 1|dy \leqslant \|\sigma Q\|_{L^2(Y_0)}|Y_0|^{1/2} + |Y_0| \leqslant 2|Y_0|$ в силу (8). Тому функція $R$ обмежена на $\mathbb{C}_0$, адже можна безпосередньо перевірити, що задача (7) має єдиний розв'язок для всіх $\sigma \in \mathbb{C}_0$, і він голоморфний і неперервний в силу теореми 2, а також відомих властивостей розв'язків задачі (2), встановлених, наприклад, в [4].

Доведімо також, що функції $Re(\sigma R)$ і $Re(R)$ недодатні на $\mathbb{C}_0$. Домножуючи рівняння (7) на $\sigma\overline{\sigma Q}$ й інтегруючи на $Y_0$, маємо $\sigma\int\limits_{Y_0}\overline{\sigma}\sigma\overline{Q}(\sigma Q - 1)dy + \int\limits_{Y_0}|\sigma\nabla Q|^2 dy = 0$ і

$$\sigma\int\limits_{Y_0}(\overline{\sigma}\overline{Q} - 1)(\sigma Q - 1)\,dy + \sigma\int\limits_{Y_0}(\sigma Q - 1)\,dy + \|\sigma\nabla Q\|^2_{L^2(Y_0)} = 0.$$

Далі, використовуючи (9) і спряження, одержуємо

$$-\sigma R\,|Y_1| = \sigma\,\|\sigma Q - 1\|^2_{L^2(Y_0)} + \|\sigma\nabla Q\|^2_{L^2(Y_0)}, \quad -\overline{\sigma R}\,|Y_1| = \overline{\sigma}\,\|\sigma Q - 1\|^2_{L^2(Y_0)} + \|\sigma\nabla Q\|^2_{L^2(Y_0)}.$$

Додаючи останні дві нерівності, маємо

$$Re(-\sigma R) \geqslant 0, \qquad Re(-R) \geqslant 0 \quad \text{для} \quad \sigma \in \mathbb{C}_0, \tag{10}$$

де остання нерівність перевіряється шляхом домноження останніх двох рівностей на $1/\sigma$ й $1/\overline{\sigma}$ відповідно, з урахуванням елементарних тотожностей, наприклад $1/\sigma = \sigma_1/|\sigma|^2 - i\sigma_2/|\sigma|^2$.

Домножуючи рівність (5) на $\overline{V}$, а спряжену до неї на $V$, інтегруючи на $\Omega$ й додаючи, одержуємо з урахуванням (10), що

$$\sigma_1\|V\|^2_{L^2(\Omega)} + \|V\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leqslant Re\int\limits_{\Omega}(\mathbb{F}\overline{V})\,dx \leqslant \|\mathbb{F}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|V\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Таким чином, маємо

$$\|V\|_{H^1_0(\Omega)} \leqslant \|\mathbb{F}\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

**Розв'язність осереднених задач у згортках.** З урахуванням обмеженості $R$, подання (6), останньої нерівності, теореми 2, одержуємо таке твердження.

**Теорема 3.** *Для кожного* $\sigma \in \mathbb{C}_0$, $u_0 \in H^{-1}(\Omega)$ *і* $f \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$ *існує єдиний розв'язок* $V \in H_0^1(\Omega)$ *задачі (5), такий що*

$$\| V \|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \| u_0 \|_{H^{-1}(\Omega)} + \| F \|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Отже, з огляду на інтегровність $\mathbb{F}(\sigma)$ із (6) в розумінні означення простору $E_0(H^{-1}(\Omega))$ при $u_0 = 0$, одержуємо доведення оцінки теореми 1 в розглядуваному випадку.

Користуючись лінійністю задачі (4), для завершення дослідження розв'язності осереднених задач залишилося розглянути випадок довільного $u_0$ і $f = 0$. У цьому випадку умова інтегровності $\mathbb{F}(\sigma)$ із (6) в розумінні означення простору $E_0(H^{-1}(\Omega))$ не виконується. Проте можна скористатися також лінійністю задачі (4) й відомими оцінками [4].

Розгляньмо для функції $\tilde{v} = \tilde{v}(t, x)$ допоміжну задачу

$$\tilde{v}'_t - \Delta \tilde{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{11}$$

$$\tilde{v}|_{t=0} = u_0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \tilde{v} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,\infty).$$

Відомо [4] й безпосередньо перевіряється, що ця задача має єдиний розв'язок $\tilde{v} \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega))$, причому $\tilde{v}'_t \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$.

За зроблених припущень для $u_0$ і $f$, нехай $u = v - \tilde{v}$, де $v$ і $\tilde{v}$ позначають розв'язки задач (4) і (11). Тоді $u$ є розв'язком задачі

$$u'_t - r^*(u'_t) - \Delta u = r^*(\tilde{v}'_t) \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,\infty),$$

$$u|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,\infty).$$

Отже, використавши вже доведені оцінки, завершуємо доведення оцінки теореми 1.

Далі, для $f$ і $u_0$ з теореми 1 задачу (5) можна переписати у вигляді

$$\sigma V - u_0 = F + (1-R)^{-1} \Delta V \quad \text{в} \quad \Omega, \quad V|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

де вираз $(1-R)^{-1}$ має зміст, оскільки з (8) і (10) випливає

$$1 \leqslant 1 - ReR \leqslant |1 - ReR| \leqslant |1 - R| \leqslant 1 + |R| \leqslant 1 + 2|Y_0||Y_1|^{-1}.$$

Для комплексного $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$ маємо $\sigma^{-1} = \sigma_1 |\sigma|^{-2} - i\sigma_2 |\sigma|^{-2}$, звідки

$$|(1-R)^{-1}| \leqslant |1 - ReR| + |ImR| \leqslant 1 + 2|R| \leqslant 1 + 4|Y_0||Y_1|^{-1}.$$

Це означає, що функція $(1-R)^{-1}$ обмежена на $\mathbb{C}_0$.

Для $f \in L^2(0,\infty; H^{-1}(\Omega))$ та $u_0 \in L^2(\Omega)$ права частина рівняння з (12) належить $H^{-1}(\Omega)$ для $\sigma \in \mathbb{C}_0$ і є інтегровною в розумінні означення $E_0(H^{-1}(\Omega))$. Крім того, перетворення Лапласа похідної $v'_t$ розв'язку задачі (4) тотожне лівій частині цього рівняння. Таким чином, $v'_t \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$.

Відповідно, маємо включення $v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ і $v'_t \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. За відомою теоремою про вкладення (див. напр. [4]), одержуємо $v \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ для фіксованого додатного $T$, що завершує доведення теореми 1.

**Висновки.** В роботі досліджено початково-крайові задачі для нестаціонарних рівнянь дифузії й фільтрації в слабко пористих середовищах. Одержано твердження про розв'язність таких задач і відповідних осереднених задач у згортках. Ці твердження доведено для загальних вхідних даних і неоднорідних початкових умов, і вони узагальнюють класичні результати про розв'язність початково-крайових задач для рівняння теплопровідності. У доведеннях використовуються методи апріорних оцінок і відомий метод Аграновича—Вішика, що ґрунтується на перетворенні Лапласа і розроблений для дослідження параболічних задач.

*Роботу виконано за фінансової підтримки МОН України (проєкт 0219U008403).*

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Sandrakov G. V. The homogenization of nonstationary equations with contrast coefficients. *Dokl. Mathematics*. 1997. **56**, № 1. P. 586—589.
2. Sandrakov G. V. Homogenization of parabolic equations with contrasting coefficients. *Izvestiya: Math*. 1999. **63**, № 5. P. 1015—1061.
3. Sandrakov G. V. Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters. *Izvestiya: Mathematics*. 2007. **71**, № 6. P. 1193—1252.
4. Duvaut G., Lions J.-L. Les inequations en mecanique et en physique. Dunod, Paris, 1972.
5. Jager W., Rannacher R., Warnatz J. (Eds.) Reactive Flows, Diffusion and Transport. From Experiments via Mathematical Modeling to Numerical Simulation and Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.
6. Amosov A. A., Zlotnik A. A. On the quasi-averaging of a system of equations of the one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas with rapidly oscillating data. *Comput. Math. Math. Phys*. 1998. **38**, № 7. P. 1152—1167.
7. Amosov A. A., Zlotnik A. A. Justification of two-scale averaging of equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity with nonsmooth data. *Comput. Math. Math. Phys*. 2001. **41**, № 11. P. 1630—1650.
8. Agranovich M. S., Vishik M. I. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russian Math. Surveys*. 1964. **19**, № 3. P. 53—157.
9. Сандраков Г.В., Гуляницкий А.Л. Разрешимость осредненных задач в свертках для слабо пористых сред. *Журн. обчисл. та прикл. матем*. 2020. № 2 (134). С. 59—70.

Надійшло до редакції 08.09.2021

REFERENCES

1. Sandrakov, G. V. (1997). The homogenization of nonstationary equations with contrast coefficients. Dokl. Mathematics, 56, No.1, pp. 586-589.
2. Sandrakov, G. V. (1999). Homogenization of parabolic equations with contrasting coefficients. Izvestiya: Math., 63, No. 5, pp. 1015-1061.
3. Sandrakov, G. V. (2007). Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters. Izvestiya: Mathematics, 71, No. 6, pp. 1193-1252.
4. Duvaut, G. & Lions, J.-L. (1972). Les inequations en mecanique et en physique. Dunod, Paris.
5. Jager, W., Rannacher, R. & Warnatz, J. (Eds.) (2007). Reactive Flows, Diffusion and Transport. From Experiments via Mathematical Modeling to Numerical Simulation and Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer.
6. Amosov, A. A. & Zlotnik, A. A. (1998). On the quasi-averaging of a system of equations of the one-dimensional motion of a viscous heat-conducting gas with rapidly oscillating data. Comput. Math. Math. Phys., 38, No. 7, pp. 1152-1167.
7. Amosov, A. A. & Zlotnik, A. A. (2001). Justification of two-scale averaging of equations of one-dimensional nonlinear thermoviscoelasticity with nonsmooth data. Comput. Math. Math. Phys., 41, No. 11, pp. 1630-1650.

8. Agranovich, M. S. & Vishik, M. I. (1964). Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. Russian Math. Surveys, 19, No. 3, pp. 53-157.
9. Sandrakov, G.V. & Hulianytskyi, A. L. (2020). Solvability of homogenized problems with convoluitions for weakly porous media. J. Numer. Appl. Mathematics, № 2 (134), pp. 59-70 (in Russian).

Received 08.09.2021

*A.L. Hulianytskyi,* https://orcid.org/0000-0001-5269-097X
*G.V. Sandrakov,* https://orcid.org/0000-0001-9133-605X

Taras Shevchenko National University of Kyiv
E-mail: andriyhul@gmail.com, gsandrako@gmail.com

SOLVABILITY OF EQUATIONS WITH CONVOLUTIONS
THAT ARISE IN HOMOGENIZATION PROBLEMS

We consider the initial-boundary-value problems for the non-stationary equations of filtration in porous media. Such problems are relevant in the underground water pollution control. We consider the periodic media with a small microscale coefficient as models of porous media. We present the solvability and regularity theorems for the corresponding homogenized problems with convolutions. These theorems are formulated for general input data and non-homogeneous initial conditions, and they extend the classical solvability theorems for the heat equation. To prove the theorems, we use the *a priori* estimate method and the well-known Agranovich—Vishik method.

***Keywords***: initial-boundary-value problem, homogenized equation, *a priori* estimate, Laplace transform.