https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.021
УДК 621.391:519.22

І.М. Яворський[1,2], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
Р.М. Юзефович[1,3], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
О.В. Личак[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів
[2] Бидгощська політехніка, Польща
[3] Національний університет "Львівська політехніка"
E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

Аналіз високочастотної модуляції несучих гармонік періодично нестаціонарного випадкового сигналу

Представлено академіком НАН України З.Т. Назарчуком

Проведено аналіз кореляційних і спектральних властивостей періодично нестаціонарного випадкового сигналу (ПНВС), несучі гармоніки якого модульовані за амплітудою та фазою високочастотними стаціонарно зв'язаними випадковими процесами. Показано, що кореляційні функції сигналу та його перетворення Гільберта є однаковими, а їх взаємокореляційні функції мають протилежні знаки. Отримано представлення вузькосмугового ПНВС у вигляді стаціонарних, але періодично-нестаціонарно зв'язаних компонент. Показано можливості виділення й аналізу їх квадратур з використанням перетворення Гільберта.

Ключові слова: *періодично нестаціонарні випадкові сигнали, високочастотна модуляція, перетворення Гільберта, квадратурні складові.*

Стохастичні коливання, які мають властивості як повторюваності, так і стохастичності, зустрічаються в багатьох областях науки і техніки [1—9]. У моделі коливань у вигляді періодично нестаціонарних випадкових процесів (ПНВП) взаємодія цих характерних рис описується стохастичною модуляцією несучих гармонік [9—13]. Така модуляція може бути як низькочастотною, так і високочастотною, а також широкосмуговою чи вузькосмуговою в кожній окремій області. Річні варіації геофізичних процесів, наприклад, характеризуються як низькочастотною, так і високочастотною модуляцією [1, 7]. Водночас у добовій ритміці багатьох процесів спостерігається переважно низькочастотна вузькосмугова модуляція. Гармонічні складові вібрації з характерними для певного механізму частотами можуть бути в залежності від типу дефекту модульовані як низькочастотними, так і високочастотними

Цитування: Яворський І.М., Юзефович Р.М., Личак О.В. Аналіз високочастотної модуляції несучих гармонік періодично нестаціонарного випадкового сигналу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 2. С. 21—31. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.02.021

випадковими процесами. Високочастотна модуляція у вібраціях виникає при появі локальних дефектів, тому в літературі основна увага прикута до її аналізу. Цей аналіз традиційно проводиться з використанням методу "обвідної" чи "високочастотного резонансу". Цей метод повстав і існує до цих пір як емпіричний, що зумовило появу багатьох його модифікацій, котрі не мають чіткого теоретичного обґрунтування. Метою даної роботи є встановлення теоретичних аспектів такого підходу, а саме аналіз перетворення Гільберта ПНВП, несучі гармоніки якого промодульовані за амплітудою і фазою високочастотними стаціонарними випадковими процесами. Такий ПНВП представляється у вигляді:

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^{L} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t} = \xi_0(t) + \sum_{k=1}^{L} [\xi_k^c(t)\cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t)\sin k\omega_0 t], \tag{1}$$

де $\xi_0(t)$ і $\xi_k(t) = \dfrac{1}{2}[\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)]$ — стаціонарно зв'язані випадкові процеси, а $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$; T — період. Кореляційна функція випадкового процесу (1) дорівнює:

$$b_\xi(t,u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \tag{2}$$

де

$$B_r^{(\xi)}(u) = \sum_{l \in M} R_{l-r,\,l}^{(\xi)}(u) e^{il\omega_0 u}, \tag{3}$$

при цьому $R_{kl}^{(\xi)}(u) = E\overline{\overset{\circ}{\xi}_k(t)}\overset{\circ}{\xi}_l(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}_k(t) = \xi_k(t) - m_k$, $m_k = E\xi_k(t)$, $M = \{-L, \ldots, k+L\}$ для $r \leqslant 0$ і $M = \{r-L, \ldots, L\}$ для $r > 0$. Взаємокореляційна функція $R_{kl}^{(\xi)}(u)$ визначається співвідношенням:

$$R_{kl}^{(\xi)}(u) = \frac{1}{4}[R^c_{\xi_k\xi_l}(u) + R^s_{\xi_k\xi_l}(u) - i[R^{cs}_{\xi_k\xi_l}(u) - R^{sc}_{\xi_k\xi_l}(u)]],$$

де $R^{c,s}_{\xi_k\xi_l}(u) = E\overset{\circ}{\xi}{}_k^{c,s}(t)\overset{\circ}{\xi}{}_l^{c,s}(t+u)$, $R^{cs}_{\xi_k\xi_l}(u) = E\overset{\circ}{\xi}{}_k^{c}(t)\overset{\circ}{\xi}{}_l^{s}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}{}_k^{c,s}(t) = \xi_k^{c,s}(t) - m_k^{c,s}$, $m_k^{c,s} = E\xi_k^{c,s}(t)$. Далі вважатимемо $m_k^{c,s} = 0$.

Припустимо, що спектральна густина потужності модулюючих процесів

$$f_{kk}^{(\xi)}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_{kk}^{(\xi)}(u) e^{i\omega u} du$$

сконцентрована на інтервалі $[\gamma_0 - \omega_m, \gamma_0 + \omega_m]$, $(\gamma - \omega_m) > L\omega_0$. Взявши до уваги теорему Бедросяна [12, 13] для перетворення Гільберта сиглалу (1) маємо:

$$\eta(t) = H\{\xi(t)\} = \eta_0(t) + \sum_{k=1}^{L} [\eta_k^c(t)\cos k\omega_0 t + \eta_k^s(t)\sin k\omega_0 t], \tag{4}$$

де

$$\eta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\xi_0(\tau)d\tau, \quad \eta_k^{c,s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\xi_k^{c,s}(\tau)d\tau \tag{5}$$

і $h(\tau) = (\pi\tau)^{-1}$. Впровадимо комплексно-значні стаціонарно зв'язані випадкові процеси:

$$\eta_k(t) = \frac{1}{2}[\eta_k^c(t) - i\eta_k^s(t)]$$

і перепишемо стохастичний ряд (4) у вигляді:

$$\eta(t) = \sum_{k=-L}^{L} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \tag{6}$$

причому $\eta_{-k}(t) = \overline{\eta}_k(t)$. На основі (6) отримуємо:

$$b_\eta(t,u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \tag{7}$$

де

$$B_r^{(\eta)}(u) = \frac{1}{4}\sum_{l\in M}[R^c_{\eta_{l-r}\eta_l}(u) + R^s_{\eta_{l-r}\eta_l}(u) - i[R^{cs}_{\eta_{l-r}\eta_l}(u) - R^{sc}_{\eta_{l-r}\eta_l}(u)]]e^{il\omega_0 u}.$$

Взявши до уваги (1) і (6) для взаємокореляційних функцій сигналу та його перетворення Гільберта знаходимо:

$$b_{\xi\eta}(t,u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\xi\eta)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \tag{8}$$

$$b_{\eta\xi}(t,u) = \sum_{r=-2L}^{2L} B_r^{(\eta\xi)}(u) e^{ir\omega_0 t}, \tag{9}$$

де

$$B_r^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{4}\sum_{l\in M}[R^c_{\xi_{l-r}\eta_l}(u) + R^s_{\xi_{l-r}\eta_l}(u) - i[R^{cs}_{\xi_{l-r}\eta_l}(u) + R^{sc}_{\xi_{l-r}\eta_l}(u)]]e^{il\omega_0 u}, \tag{10}$$

$$B_r^{(\eta\xi)}(u) = \frac{1}{4}\sum_{l\in M}[R^c_{\eta_{l-r}\xi_l}(u) + R^s_{\eta_{l-r}\xi_l}(u) - i[R^{cs}_{\eta_{l-r}\xi_l}(u) + R^{sc}_{\eta_{l-r}\xi_l}(u)]]e^{il\omega_0 u}.$$

Теорема 1. *Автокореляційні функції сигналу* (2) *та його перетворення Гільберта* (7) *є однаковими, їхні взаємокореляційні функції* (8) *і* (9) *відрізняються тільки знаком, нульові взаємокореляційні компоненти є непарними функціями зсуву та визначаються виразом:*

$$B_0^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[f_{\xi_0}(\omega)\sin\omega u du + 2\sum_{l=1}^{L} \begin{bmatrix} [f^c_{\xi_l}(\omega) + f^s_{\xi_l}(\omega)]\sin\omega u\cos l\omega_0 u - \\ -2\overset{\approx cs}{f}_{\xi_l}(\omega)\cos\omega u\sin l\omega_0 u \end{bmatrix} \right] d\omega, \tag{11}$$

де

$$f_{\xi_0}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}R_{\xi_0}(u)\cos\omega u du\ ,$$

$$f_{\xi_l}^{c,s}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}R_{\xi_l}^{c,s}(u)\cos\omega u du\ ,\quad f_{\xi_l}^{cs}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}R_{\xi_l}^{cs}(u)\sin\omega u du\ .$$

Доведення. Щоб полегшити аналіз, перейдемо в частотну область. Для спектральних і взаємоспектральних густин стаціонарнозв'язаних компонент та їх перетворень Гільберта, врахувавши формули (4) знаходимо:

$$f_{\eta_k\eta_l}^{c,s}(\omega)=-H(\omega)f_{\xi_k\eta_l}^{c,s}(\omega),\quad f_{\eta_l\xi_k}^{c,s}(\omega)=-H(\omega)f_{\xi_l\xi_k}^{c,s}(\omega),$$

де $H(\omega)=-i$ для $\omega>0$, $H(\omega)=i$ для $\omega<0$.

Оскільки $f_{\xi_k\eta_l}^{c,s}=\overline{f}_{\eta_l\xi_k}^{c,s}(\omega)$, то $f_{\eta_k\eta_l}^{c,s}(\omega)=H(\omega)\overline{H}(\omega)\overline{f}_{\xi_l\xi_k}^{c,s}(\omega)=f_{\xi_k\xi_l}^{c,s}(\omega)$, а звідси $R_{\eta_k\eta_l}^{c,s}(u)=R_{\xi_k\xi_l}^{c,s}(u)$.

Подібно на основі співвідношень $f_{\eta_k\eta_l}^{cs}(\omega)=-H(\omega)f_{\xi_k\eta_l}^{cs}(\omega)$, $f_{\eta_l\xi_k}^{cs}(\omega)=-H(\omega)f_{\xi_l\xi_k}^{cs}(\omega)$ приходимо до $R_{\eta_k\eta_l}^{sc}(u)=R_{\xi_k\xi_l}^{sc}(u)$. З отриманих рівностей випливає, що $b_{\eta}(t,u)=b_{\xi}(t,u)$.

Із формул для зворотніх перетворень Гільберта

$$\zeta_0(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\eta_0(\tau)d\tau\ ,\quad \xi_k^{c,s}(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\eta_k(\tau)d\tau$$

маємо:

$$f_{\xi_k\eta_l}^{c,s}(\omega)=-H(\omega)f_{\eta_k\eta_l}^{c,s}(\omega),\quad f_{\xi_k\eta_l}^{cs}(\omega)=-H(\omega)f_{\eta_k\eta_l}^{cs}(\omega).$$

Використовуючи їх, приходимо до рівностей $R_{\eta_k\xi_l}^{c,s}(u)=-\ R_{\xi_k\eta_l}^{c,s}(u)$ і $R_{\eta_k\xi_l}^{cs}(u)=-\ R_{\xi_k\eta_l}^{cs}(u)$, $R_{\eta_k\xi_l}^{cs}(u)=-\ R_{\xi_k\eta_l}^{cs}(u)$, тоді $B_r^{(\eta\xi)}(u)=-B_r^{(\xi\eta)}(u)$ і $b_{\eta\xi}(t,u)=-b_{\xi\eta}(t,u)$.

Формулу (11) отримуємо, якщо до співвідношення (10) при $r=0$ підставимо представлення:

$$R_{\xi_0\eta_0}(u)=2\int_0^{\infty}f_{\xi_0}(\omega)\sin\omega u d\omega\ ,\quad R_{\xi_l\eta_l}^{c,s}(u)=2\int_0^{\infty}f_{\xi_l}^{c,s}(\omega)\sin\omega u d\omega,$$

$$R_{\xi_l\eta_l}^{cs}(u)=-R_{\eta_l\xi_l}^{cs}(u)=-2\int_0^{\infty}\tilde{\tilde{f}}_{\xi_l}^{cs}(\omega)\cos\omega u du,$$

де уявна частина спектральної густини $f_{\xi_l}^{cs}(\omega)=\tilde{f}_{\xi_l}^{cs}(\omega)-i\tilde{\tilde{f}}_{\xi_l}^{cs}(\omega)$. *Теорема доведена.*

Кореляційна функція аналітичного сигналу $b_{\zeta}(t,u)=2[b_{\xi}(t,u)+ib_{\xi\eta}(t,u)]$ представляється рядом

$$b_{\zeta}(t,u)=2\sum_{r=-2L}^{2L}[B_r^{(\xi)}(u)+iB_r^{(\xi\eta)}(u)]e^{ir\omega_0 t}\ .$$

Оскільки $B_r^{(\xi\eta)}(u) = -B_r^{(\eta\xi)}(u)$, то $B_r^{(\xi\eta)}(0) = 0$. Для дисперсії $b_\zeta(t,0)$ маємо:

$$b_\zeta(t,0) = B_0^{(\xi)}(0) + \sum_{r=1}^{2L} [C_r^{(\zeta)}(0)\cos r\omega_0 t + S_r^{(\zeta)}(0)\sin r\omega_0 t],$$

при цьому

$$B_0^{(\xi)}(0) = 2R_{\xi_0} + \sum_{l=1}^{L} [R_{\xi_l}^c(0) + R_{\xi_l}^s(0)],$$

$$C_r^{(\zeta)}(0) = \sum_{l=-L+r}^{L} [R_{\xi_{l-r}\xi_l}^c(0) + R_{\xi_{l-r}\xi_l}^s(0)], \quad S_r^{(\zeta)}(0) = \sum_{l=-L+r}^{L} [R_{\xi_{l-r}\xi_l}^{cs}(0) + R_{\xi_{l-r}\xi_l}^{sc}(0)].$$

З рівності

$$B_r^{(\xi)}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T b_\zeta(t,0) e^{ir\omega_0 t} dt$$

випливає, що $\left|B_r^{(\xi)}(0)\right| \leqslant B_0^{(\xi)}(0)$, тобто модулі коефіцієнтів Фур'є дисперсії, які визначаються взаємокореляціями квадратур, є завжди менші від середньої потужності сигналу. Ми можемо подати залежності цієї потужності, а також амплітуд гармонік дисперсії від спектральних компонент сигналу $f_r(\omega) = \operatorname{Re} f_r(\omega) - i \operatorname{Im} f_r(\omega)$:

$$B_0^{(\xi)}(0) = \int_{\gamma_0-\omega_m-L\omega_0}^{\gamma_0+\omega_m+L\omega_0} [2f_{\xi_0}(\omega) + \sum_{l=1}^{L} [f_{\xi_l}^c(\omega) + f_{\xi_l}^s(\omega)]] d\omega, \tag{12}$$

$$2\left|B_r^{(\xi)}(0)\right| = 2\int_{\gamma_0-\omega_m-L\omega_0}^{\gamma_0+\omega_m+L\omega_0} [[\operatorname{Re} f_r^{(\xi)}(\omega)]^2 + [\operatorname{Im} f_r^{(\xi)}(\omega)]^2] d\omega. \tag{13}$$

Звідси випливає, що фільтрація сигналу в смузі $[\omega_1, \omega_2]$, яка є вужчою, ніж $[\gamma_0 - \omega_m - L\omega_0, \gamma_0 + \omega_m + L\omega_0]$ зменшує потужність шумової складової (12). Амплітуди гармонік (13) зменшуються, якщо фільтрація звужує області значень спектральних компонентів, тобто область корельованості гармонік спектра сигналу. Відмітимо, що смуга амплітудного спектра дисперсії зменшується при такій фільтрації і гармоніки з номерами r, для яких $\omega_1 + r\omega_0 \geqslant \omega_2$ в спектрі відсутні. З ростом номерів гармонік також зменшується їх амплітуда.

Припустимо тепер, що високочастотна модуляція є вузькосмуговою і представимо модуляційні процеси формулами Райса:

$$\xi_0(t) = p_0^c(t)\cos\mu_0 t + p_0^s(t)\sin\mu_0 t, \tag{14}$$

$$\xi_k^c(t) = p_k^c(t)\cos\mu_0 t + p_k^s(t)\sin\mu_0 t, \tag{15}$$

$$\xi_k^s(t) = q_k^c(t)\cos\mu_0 t + q_k^s(t)\sin\mu_0 t, \tag{16}$$

при цьому квадратури будемо вважати стаціонарними випадковими процесами, кореляційні функції яких задовольняють умови:

$$R^{c}_{p_k p_l}(u)-R^{s}_{p_k p_l}(u)=0,\quad R^{cs}_{p_k p_l}(u)+R^{sc}_{p_k p_l}(u)=0, \tag{17}$$

$$R^{c}_{q_k q_l}(u)-R^{s}_{q_k q_l}(u)=0,\quad R^{cs}_{q_k q_l}(u)+R^{sc}_{q_k q_l}(u)=0, \tag{18}$$

$$R^{c}_{p_k q_l}(u)-R^{s}_{p_k q_l}(u)=0,\quad R^{cs}_{p_k q_l}(u)+R^{sc}_{p_k q_l}(u)=0. \tag{19}$$

За таких умов випадкові процеси (14) — (16) є стаціонарно зв'язаними. Впровадимо випадкові процеси

$$\mu^{c}_{k}(t)=\frac{1}{2}[p^{c}_{k}(t)-q^{s}_{k}(t)],\quad \mu^{s}_{k}(t)=\frac{1}{2}[p^{s}_{k}(t)+q^{c}_{k}(t)], \tag{20}$$

$$\nu^{c}_{k}(t)=\frac{1}{2}[p^{c}_{k}(t)+q^{s}_{k}(t)],\quad \nu^{s}_{k}(t)=\frac{1}{2}[p^{s}_{k}(t)-q^{c}_{k}(t)] \tag{21}$$

і представимо сигнал (1) у вигляді:

$$\xi(t)=\xi_0(t)+\sum_{k=1}^{L}[\xi^{+}_{k}(t)+\xi^{-}_{k}(t)],$$

де

$$\xi^{+}_{k}(t)=\mu_k(t)e^{i(\mu_0+k\omega_0)t}+\overline{\mu}_k(t)e^{-i(\mu_0+k\omega_0)t}, \tag{22}$$

$$\xi^{-}_{k}(t)=\nu_k(t)e^{i(\mu_0-k\omega_0)t}+\overline{\nu}_k(t)e^{-i(\mu_0-k\omega_0)t}, \tag{23}$$

при цьому

$$\mu_k(t)=\frac{1}{2}[\mu^{c}_{k}(t)-i\mu^{s}_{k}(t)],\quad \mu_{-k}(t)=\overline{\mu}_k(t), \tag{24}$$

$$\nu_k(t)=\frac{1}{2}[\nu^{c}_{k}(t)-i\nu^{s}_{k}(t)],\quad \nu_{-k}(t)=\overline{\nu}_k(t). \tag{25}$$

Теорема 2. *Випадкові процеси (22) і (23) є стаціонарними і періодично-нестаціонарно зв'язаними, їх авто- і взаємокореляційні функції визначаються формулами:*

$$R_{\xi^{+}_{k}\xi^{+}_{l}}(t,u)=\frac{1}{4}[[R^{c}_{p_k p_l}(u)+R^{c}_{q_k q_l}(u)+R^{cs}_{q_k p_l}(u)+R^{sc}_{p_k q_l}(u)]\cos[(l-k)\omega_0 t+(\mu_0+l\omega_0)u]+$$
$$+[R^{c}_{p_k q_l}(u)-R^{c}_{q_k p_l}(u)+R^{cs}_{p_k p_l}(u)+R^{cs}_{q_k q_l}(u)]\sin[(l-k)\omega_0 t+(\mu_0+l\omega_0)u]], \tag{26}$$

$$R_{\xi^{-}_{k}\xi^{-}_{l}}(t,u)=\frac{1}{4}[[R^{c}_{p_k p_l}(u)+R^{c}_{q_k q_l}(u)+R^{cs}_{p_k q_l}(u)+R^{sc}_{q_k p_l}(u)]\cos[(l-k)\omega_0 t+(\mu_0-l\omega_0)u]+$$
$$+[R^{c}_{q_k p_l}(u)-R^{c}_{p_k q_l}(u)+R^{cs}_{p_k p_l}(u)+R^{cs}_{q_k q_l}(u)]\sin[(l-k)\omega_0 t+(\mu_0-l\omega_0)u]], \tag{27}$$

$$R_{\xi_k^+\xi_l^-}(t,u)=\frac{1}{4}[[R^c_{p_kp_l}(u)-R^c_{q_kq_l}(u)+R^{cs}_{p_kq_l}(u)+R^{sc}_{q_kp_l}(u)]\cos[(l+k)\omega_0 t-(\mu_0-l\omega_0)u]+$$

$$+[R^c_{p_kq_l}(u)+R^c_{q_kp_l}(u)-R^{cs}_{p_kp_l}(u)-R^{cs}_{q_kq_l}(u)]\sin[(l+k)\omega_0 t-(\mu_0-l\omega_0)u]]. \quad (28)$$

Доведення. Взаємокореляційні функції випадкових процесів (22) і (23) визначаються виразами

$$R_{\xi_k^+\xi_l^+}(t,u)=2\operatorname{Re}\{e^{i(\mu_0+l\omega_0)u}[R_{\bar{\mu}_k\mu_l}(u)e^{i(l-k)\omega_0 t}+R_{\mu_k\mu_l}(u)e^{i[2\mu_0+(l+k)\omega_0]t}]\},$$

$$R_{\xi_k^-\xi_l^-}(t,u)=2\operatorname{Re}\{e^{i(\mu_0-l\omega_0)u}[R_{\bar{\nu}_k\nu_l}(u)e^{i(l-k)\omega_0 t}+R_{\nu_k\nu_l}(u)e^{i[2\mu_0-(l+k)\omega_0]t}]\}, \quad (30)$$

$$R_{\xi_k^+\xi_l^-}(t,u)=2\operatorname{Re}\{e^{i(\mu_0-l\omega_0)u}[R_{\bar{\mu}_k\mu_l}(u)e^{-i(l+k)\omega_0 t}+R_{\mu_k\mu_l}(u)e^{i[2\mu_0-(l-k)\omega_0]t}]\}.$$

На основі співвідношень (20) і (24) та врахувавши рівності (17) — (19), знаходимо:

$$R_{\bar{\mu}_k\mu_l}(u)=\frac{1}{8}[R^c_{p_kp_l}(u)+R^c_{q_kq_l}(u)+R^{cs}_{q_kp_l}(u)+R^{cs}_{p_kq_l}(u)+R^{sc}_{p_kq_l}(u)+$$

$$+i[R^c_{p_kq_l}(u)-R^c_{q_kp_l}(u)+R^{cs}_{p_kp_l}(u)+R^{cs}_{q_kq_l}(u)]],\quad R_{\mu_k\mu_l}(u)=0.$$

Після підстановки цих виразів до (30) отримуємо формулу (26).

У результаті подібних обчислень на основі (20) та (21) і (24) та (25) приходимо до формул (27) і (28).

Поклавши у виразах (26) і (27) $k=l$, отримуємо формули для автокореляційних функцій процесів (22) і (23). Ці функції залежать тільки від зсуву. Відтак, випадкові процеси (22) і (23) є стаціонарними, однак взаємоперіодично нестаціонарними, оскільки їх взаємокореляційні функції $\forall k,l=\overline{1,L}$ періодично змінюються з часом. *Теорема доведена*.

Сума автокореляційних функцій процесів (22) і (23) визначає незалежну від часу частину кореляційної функції сигналу (2), тобто його нульовий кореляційний компонент:

$$B_0^{(\xi)}(u)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{L}[[[R^c_{p_k}(u)+R^c_{q_k}(u)]\cos\mu_0 u+[R^{cs}_{p_k}(u)+R^{cs}_{q_k}(u)]\sin\mu_0 u]\cos k\omega_0 u+$$

$$+2[\tilde{\tilde{R}}_{p_kq_k}(u)\cos\mu_0 u+\tilde{R}^{cs}_{p_kp_k}(u)\sin\mu_0 u]\sin l\mu_0 u].$$

Залежна від часу частина кореляційної функції сигналу визначається сумою взаємокореляційних функцій (26) — (28), при цьому $R_{\xi_k^-\xi_l^+}(t,u)=R_{\xi_l^+\xi_k^-}(t+u,-u)$.

Формулу для амплітуд кожної гармоніки кореляційної функції, тобто кореляційного компонента $B_r^{(\xi)}(u)$ легко отримуємо, використовуючи вираз (3). Представимо модуляційні процеси у вигляді:

$$\xi_k(t)=\frac{1}{2}[\xi_k^c(t)-i\xi_k^s(t)]=\frac{1}{2}[\mu_k(t)e^{i\mu_0 t}+\bar{\nu}_k(t)e^{-i\mu_0 t}].$$

Звідси

$$R_{kl}^{(\xi)}(u)=\frac{1}{4}[R_{\mu_k\mu_l}(u)e^{i\mu_0 u}+R_{\nu_k\bar{\nu}_l}(u)e^{-i\mu_0 u}].$$

Взявши до уваги отримані вище співвідношення, а також рівність $R_{\nu_k\bar{\nu}_l}(u)=\overline{R}_{\bar{\nu}_k\nu_l}(u)$, маємо:

$$R_{kl}^{(\xi)}(u)=\frac{1}{4}[[R_{p_kp_l}^{c}(u)+R_{q_kq_l}^{c}(u)]\cos\mu_0 u+[R_{p_kp_l}^{cs}(u)+R_{q_kq_l}^{cs}(u)]\sin\mu_0 u-$$

$$-i[[R_{p_kq_l}^{c}(u)-R_{q_kp_l}^{c}(u)]\cos\mu_0 u+[R_{p_kp_l}^{cs}(u)-R_{q_kq_l}^{cs}(u)]\sin\mu_0 u]]. \qquad (31)$$

Наслідок 1. *Кореляційні компоненти ПНВП, стаціонарні компоненти якого мають вигляд* (14) — (16), *та його перетворення Гільберта є одинаковими й визначаються формулами* (2) *і* (31), *а їх взаємокореляційні компоненти представляються рядом:*

$$B_r^{(\xi\eta)}(u)=-B_r^{(\eta\xi)}(u)=\sum_{l\in M}R_{l-r,\,l}^{(\xi\eta)}(u)e^{i\omega_0 u},$$

де

$$R_{k,l}^{(\xi\eta)}(u)=\frac{1}{4}[[R_{p_kp_l}^{c}(u)+R_{q_kq_l}^{c}(u)]\sin\mu_0 u-[R_{p_kp_l}^{cs}(u)+R_{q_kq_l}^{cs}(u)]\cos\mu_0 u+$$

$$+i[[R_{p_kq_l}^{cs}(u)+R_{q_kq_l}^{sc}(u)]\cos\mu_0 u-[R_{p_kq_l}^{c}(u)-R_{q_kp_l}^{c}(u)]\sin\mu_0 u]],$$

$$R_{k,l}^{(\xi\eta)}(u)=H\,\{R_{k,l}^{(\xi)}(u)\}.$$

Наслідок 2. *Аналітичний сигнал для багатокомпонентного ПНВП зі стаціонарними компонентами* (14) — (16) *має вигляд*

$$\zeta(t)=\zeta_0(t)+\sum_{k=1}^{L}[\mu_k(t)e^{i(\mu_0+k\omega_0)t}+\nu_k(t)e^{i(\mu_0+k\omega_0)t}],$$

де $\zeta_0(t)=\xi_0(t)+\eta_0(t)$. *Його кореляційні компоненти визначаються рядом*

$$B_r^{(\zeta)}(u)=2[B_r^{(\xi)}(u)+iB_r^{(\xi\eta)}(u)]=\sum_{l\in M}R_{l-r,\,l}^{(\zeta)}(u)e^{il\omega_0 u},$$

де

$$R_{k,l}^{(\zeta)}(u)=\frac{1}{2}[R_{p_kp_l}^{c}(u)+R_{q_kq_l}^{c}(u)-R_{p_kq_l}^{cs}(u)+R_{q_kp_l}^{cs}(u)-$$

$$-i[R_{p_kq_l}^{c}(u)-R_{q_kp_l}^{c}(u)+R_{p_kp_l}^{cs}(u)+R_{q_kq_l}^{cs}(u)]]e^{i\mu_0 u}.$$

Дисперсія аналітичного сигналу дорівнює подвоєній дисперсії ПНВП:

$$b_\zeta(t,0)=2b_\xi(t,0)=2B_0^{(\xi)}(0)+2\sum_{r=1}^{2L}[C_r^{(\xi)}(0)\cos r\omega_0 t+S_r^{(\xi)}(0)\sin r\omega_0 t], \qquad (32)$$

де

$$B_0^{(\xi)}(0) = \frac{1}{4}\sum_{k=-L}^{L}[R_{p_k}^c(0) + R_{q_k}^c(0)],$$

$$C_r^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2}\sum_{l\in M}[R_{p_{l-r}p_l}^c(0) + R_{q_{l-r}q_l}^c(0)],$$

$$S_r^{(\xi)}(0) = \frac{1}{2}\sum_{l\in M}[R_{p_{l-r}q_l}^c(0) - R_{q_{l-r}p_l}^c(0)].$$

Часові зміни дисперсії (32) спостерігаються на фоні стаціонарного "шуму", потужність якого визначається сумою потужностей квадратур. Амплітуди гармонік визначаються взаємокореляціями квадратур, інтегральними характеристиками яких є кореляційні компоненти.

Для того, щоб детальніше проаналізувати кореляційну структуру квадратур, ми можемо, застосувавши смугову фільтрацію, виділити вузькосмугові компоненти:

$$\xi_k^+(t) = \mu_k^c(t)\cos(\mu_0 + k\omega_0)t + \mu_k^s(t)\sin(\mu_0 + k\omega_0)t, \tag{33}$$

$$\xi_k^-(t) = \nu_k^c(t)\cos(\mu_0 - k\omega_0)t + \nu_k^s(t)\sin(\mu_0 - k\omega_0)t, \tag{34}$$

Для перетворення Гільберта (33) і (34) маємо:

$$\zeta_k^+(t) = \mu_k^c(t)\sin(\mu_0 + k\omega_0)t - \mu_k^s(t)\cos(\mu_0 + k\omega_0)t\ , \tag{35}$$

$$\zeta_k^-(t) = \nu_k^c(t)\sin(\mu_0 - k\omega_0)t - \nu_k^s(t)\cos(\mu_0 - k\omega_0)t\ , \tag{36}$$

З рівнянь (33) і (35), (34) і (36) отримуємо:

$$\mu_k^c(t) = \xi_k^+(t)\cos(\mu_0 + k\omega_0)t + \zeta_k^+(t)\sin(\mu_0 + k\omega_0)t\ ,$$

$$\mu_k^s(t) = \xi_k^+(t)\sin(\mu_0 + k\omega_0)t - \zeta_k^+(t)\cos(\mu_0 + k\omega_0)t\ ,$$

$$\nu_k^c(t) = \xi_k^-(t)\cos(\mu_0 - k\omega_0)t + \zeta_k^-(t)\sin(\mu_0 - k\omega_0)t\ ,$$

$$\nu_k^s(t) = \xi_k^-(t)\sin(\mu_0 - k\omega_0)t - \zeta_k^-(t)\cos(\mu_0 - k\omega_0)t\ .$$

Взявши до уваги рівності (20) і (21), легко знаходимо вирази для квадратур модулюючих процесів:

$$p_k^c(t) = \mu_k^c(t) + \nu_k^c(t),\quad p_k^s(t) = \mu_k^s(t) + \nu_k^s(t),$$

$$q_k^c(t) = \mu_k^s(t) - \nu_k^s(t),\quad q_k^s(t) = \nu_k^c(t) - \mu_k^c(t).$$

Ці співвідношення доцільно використати для створення алгоритмів обробки експериментальних даних з метою виділення й аналізу квадратур високочастотних модуляцій. Кореляційна й спектральна структура квадратур відображає специфічні властивості об'єктів, що породжують ПНВП.

Висновки. З викладеного вище випливає, що спектр потужності сигналу дорівнює сумі спектрів потужності вузькосмугових процесів (22) і (23), які визначаються автокореляційними функціями (26) і (27) при $k = l$. Водночас, часові зміни дисперсії сигналу зумовлені взаємними кореляціями процесів. Тому фільтрація сигналу з шириною смуги, яка є вужчою ніж частота смуги сигналу зменшує як потужність "шумового" фону, так і амплітуди окремих гармонік дисперсії сигналу.

Проведений аналіз показав, що у випадку високочастотної модуляції несучих гармонік ПНВП суму квадратів сигналу та його перетворення Гільберта не можна трактувати як квадрат низькочастотної функції, яку називають "обвідною" сигналу [14, 15]. Це є квадрат високочастотного випадкового сигналу, математичне сподівання якого дорівнює подвоєній дисперсії сигналу. Тому його необхідно аналізувати не методами гармонічного аналізу, а методами ПНВП. Перетворення Гільберта, як показано вище, доцільно застосовувати для виділення квадратур високочастотних вузькосмугових складових сигналу, виділених за допомогою смугової фільтрації.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Драган Я.П., Яворский И.Н. Ритмика морского волнения и подводные акустические сигналы. Киев: Наук. думка, 1982. 248 с.
2. Gardner W.A. Introduction to Random Processes with Applications to Signals and Systems. New York: Macmillan, 1985. 496 p.
3. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1987. 320 p.
4. Gardner W.A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing. New York: IEEE Press, 1994. 504 p.
5. Hard H.L., Miamee A. Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. New York: Wiley, 2007. 384 p.
6. Antoni J. Cyclostationarity by examples. *Mech. Syst. Signal Process.* 2009. **23**, № 4. P. 987—1036. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.10.010
7. Javorskyj I., Yuzefovych R., Matsko I., Kravets I. The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. *Applied Condition Monitoring*. 2015. **3**. P. 55—88. https://doi.org/10.1007/987-3-319-163330-7_4
8. Napolitano A. Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Elsevier: Academic Press, 2020. 626 p.
9. Яворський І.М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. Львів: ФМІ НАН України, 2013. 802 с.
10. Yavorskyj I., Leskow I., Kravets I., Isaev I., Gajecha-Mizek E., Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. – Part II: harmonic series representation. *Signal Processing*. 2011. **91.** P. 2506—2519. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2011.04.031
11. Mykhailyshyn V., Yavorsky I., Vasylyna Ya., Drabych O., Isaev I., Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problem of diagnostics of machines and structures. *Mater. Sci.* 1997. **33.** P. 655—672.
12. Begrosian E. A product theorem for Hilbert transforms, *Proceeding of the IEEE*. 1963. **51**. P. 868—869.
13. Bendat J. S., Piersol A.G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures. John Wiley and Sons Ltd, 2010. 640 p.
14. Randall R. B., Antoni J. Rolling element bearing diagnostics – A tutorial, *Mech. Syst. Signal Process.* 2011. **25**. P. 485—520. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.07.017
15. Randall R. B., Antoni J., Chobsaard S. The relation between spectral correlation and envelope analysis. *Mech. Syst. Signal Process.* 2001. **15** (5). P. 945—962. https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1415

Надійшло до редакції 15.12.2021

REFERENCES

1. Dragan, Ya. & Yavorsky, I. (1980) Rhytmics of Sea Waving and Underwater Acoustic Signals, Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
2. Gardner, W. A. (1985). Introduction to Random Processes with Applicattions to Signals and Systems, New York: Macmillan.
3. Dragan, Ya., Yavorskyj, I. & Rozhkov, V. (1987). Methods of probabilistic analysis of oceanological rhytmics, Leningrad: Gidrometeoizdat (in Russian).
4. Gardner, W. A. (1994). Cyclostationarity in Communications and Signal Processing, New York: IEEE Press.
5. Hard, H. L. & Miamee, A. (2007). Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice, New York: Wiley.
6. Antoni, J. (2009). Cyclostationarity by examples. Mech. Syst. Signal Process., 23, pp. 987-1036. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.10.010
7. Javorskyj, I., Yuzefovych, R., Matsko, I. & Kravets, I. (2015). The stochastic recurrence structure of geophysical phenomena. Applied Condition Monitoring, 3, pp. 55-88. https://doi.org/10.1007/987-3-319-163330-7_4
8. Napolitano, A. (2020). Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations, Elsevier: Academic Press, 2020.
9. Javorskyj, I. (2013). Mathematical models and analysis of stochastic oscillations, Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute (in Ukrainian).
10. Javorskyj, I., Leskow, J., Kravets, I., Isaev, I. & Gajecha-Mizek, E. (2011). Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. — Part II: harmonic series reprsentation, Signal Process., 91, pp. 2506-2519. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2011.04.031
11. Mykhailyshyn, V., Javorsky, I., Vasylyna, Ya., Drabych, O. & Isaev, I. (1997). Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problem of diagnostics of machines and structures, Mater. Sci., 33, pp. 655-672.
12. Begrosian, E. (1963). A product theorem for Hilbert transforms, Proc. of the IEEE, 51, pp. 868-869.
13. Bendat, J. S. & Piersol, A. G. (2010). Random Data: Analysis and Measurement Procedures, John Wiley and Sons Ltd.
14. Randall, R. B. & Antoni, J. (2011). Rolling element bearing diagnostics – A tutorial, Mech. Syst. Signal Process., 25, pp. 485-520. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.07.017
15. Randall, R. B., Antoni, J. & Chobsaard, S. (2001). The relation between spectral correlation and envelope analysis, Mech. Syst. Signal Process., № 15 (5), pp. 945-962. https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1415

Received 15.12.2021

I.M. Javorskyj[1, 2], https://orcid.org/0000-0003-0243-6652
R.M. Yuzefovych[1, 3], https://orcid.org/0000-0001-5546-453X
O.V. Lychak[1], https://orcid.org/0000-0001-5559-1969

[1] Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv
[2] Bydgoszcz Politechnic, Poland
[3] Lviv Polytechnic National University
E-mail: ihor.yavorskyj@gmail.com, roman.yuzefovych@gmail.com, olehlychak2003@yahoo.com

ANALYSIS OF HIGH-FREQUENCY MODULATION OF CARRIER HARMONICS FOR PERIODICALLY NON-STATIONARY RANDOM SIGNAL

The covariance and spectral properties of the periodically non-stationary random signals (PNRS), whose carrier harmonics are high-frequency modulated by jointly stationary processes are analyzed. It is shown that the covariance functions of this PNRS and its Hilbert transform are the same and their cross-covariance functions have different signs. The representation of the narrow-band PNRS in the form of a superposition of the stationary, but jointly periodically non-stationary components is obtained. The Hilbert transforms of this representation are analyzed, and the formulae for the Fourier coefficients for the covariance function of an analytic signal are derived. These formulae show their dependences on auto- and cross-covariance functions of the narrow-band component quadratures. It is shown that such quadratures can be extracted and analyzed using the Hilbert transform.

Keywords: *periodically non-stationary random signals, high-frequency modulation, Hilbert transform, quadrature components.*