

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.03.013>

УДК 517.9 : 534.1

С.В. Донецький, <https://orcid.org/0000-0002-9094-0885>

О.Ю. Швець, <https://orcid.org/0000-0003-0330-5136>

НТУ України “Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського”

E-mails: dsvshka@gmail.com, aleksandrshvetski@gmail.com

Біфуркації максимальних атракторів неідеальних маятникових систем

Представлено академіком НАН України О.М. Тимохою

Вивчені сценарії переходу до хаосу для максимальних атракторів динамічних систем типу “сферичний маятник — електродвигун обмеженої потужності”. Встановлено, що перехід до хаосу максимальних атракторів відбувається за звичними у нелінійній динаміці сценаріями, попри те, що максимальні атрактори не є атракторами у традиційному розумінні цього поняття.

Ключові слова: динамічний хаос, сценарії переходу до хаосу, максимальний атрактор.

Під час дослідження виникнення детермінованого хаосу в динамічних системах велику увагу приділяють опису сценаріїв переходу від регулярних режимів до хаотичних. Попри велику кількість математичних моделей динамічних систем, сценарії переходу до хаосу можна поділити на три групи. До першої належить сценарій Фейгенбаума, за реалізації якого перехід до хаосу відбувається через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періодів граничних циклів [1, 2], до другої — сценарій переходу до хаосу через переміжність за Помо—Маневіллем [3, 4], до третьої — сценарій переходу до хаосу, який відбувається внаслідок руйнування інваріантних торів [5].

За останній час були описані сценарії переходу до хаосу, які являють собою різні узагальнення сценаріїв Помо—Маневілля [6, 7], а також сценарії, яким притаманні як біфуркації подвоєння періодів, так і різні типи переміжностей [8, 9]. Попри це, багато питань, що торкаються можливих сценаріїв переходу до хаосу залишаються відкритими.

1. Максимальні атрактори. Для дослідження усталених динамічних режимів важливе значення має побудова різноманітних граничних множин, зокрема атракторів. Але зазвичай дві граничні множини, що утворюють два різні атрактори, є ізольованими одна від одної у тому сенсі, що

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y) > 0,$$

де ρ — метрика; A, B — два різні атрактори.

Однак, крім таких “класичних” атракторів, існують динамічні системи, в яких майже всі граничні множини не є ізольованими, наприклад, динамічна система “сферичний маятник — електродвигун” [10]. Граничні множини цієї динамічної системи можна об’єднати в сімейства за спільними властивостями, серед яких неізолюваність, спільний спектр ляпуновських характеристичних показників (ЛХП). Такі сімейства можуть мати ще й властивість “притягувальності” (яка виокремлює атрактор серед інших граничних множин у випадку її ізолюваності). У випадку сімейства властивість “притягувальності” буде виявлятися у вигляді, що кожна траєкторія з деякої відкритої множини прямує не до всього сімейства граничних множин як такого, а до деякого її представника. Такі сімейства підпадають під означення “максимального атрактора”, яке було запропоновано в роботах [11, 12].

Виникає питання: які сценарії переходу до хаосу притаманні максимальним атракторам? Для відповіді на це питання розглянемо математичну модель динамічної системи “сферичний маятник — електродвигун”.

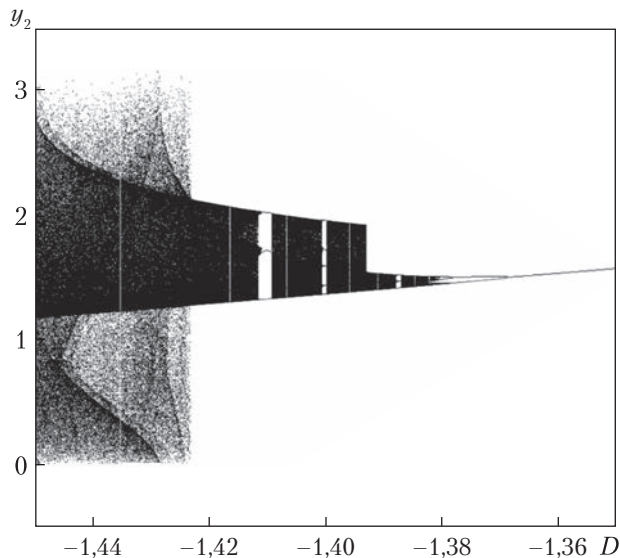
2. Математична модель неідеального сферичного маятника. Будь-яка коливальна система складається з двох основних підсистем, зокрема джерела збудження коливань і безпосередньо коливального навантаження. Якщо потужність джерела збудження порівняна до потужності, що споживає коливальне навантаження, то така система називається неідеальною за Зоммерфельдом—Кононенко [13]. Навпаки, якщо потужність джерела збудження значно перевищує потужність, споживану коливальним навантаженням, то така система називається ідеальною. В реальному світі ми маємо обмежену кількість ресурсів, у зв’язку з чим виникає потреба в мінімізації потужностей джерел збудження. Тобто більшість реальних сучасних коливальних систем є неідеальними. З точки зору математичного моделювання це означає, що ми повинні врахувати не тільки вплив джерела збудження на коливальне навантаження, а й вплив коливального навантаження на джерело збудження. Це, у свою чергу, призводить до появи додаткових рівнянь у системі диференціальних рівнянь. Через це неідеальна динамічна система може мати суттєво інші усталені режими, ніж її ідеальна версія.

Математична модель “сферичний маятник — електродвигун обмеженої потужності”, яку отримано в [14], має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= Cy_1 - [y_3 + 1/8(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_2 - 3/4(y_1y_5 - y_2y_4)y_4 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= Cy_2 + [y_3 + 1/8(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_1 - 3/4(y_1y_5 - y_2y_4)y_5 + 2y_1, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= D(y_1y_2 + y_4y_5) + Ey_3 + F, \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= Cy_4 - [y_3 + 1/8(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_5 + 3/4(y_1y_5 - y_2y_4)y_1 + 2y_5, \\ \frac{dy_5}{d\tau} &= Cy_5 + [y_3 + 1/8(y_1^2 + y_2^2 + y_4^2 + y_5^2)]y_4 + 3/4(y_1y_5 - y_2y_4)y_2 + 2y_4, \end{aligned} \quad (1)$$

де y_1, \dots, y_5 — фазові змінні, що описують поведінку і взаємодію коливального навантаження та електродвигуна; C, D, E, F — параметри системи, що залежать від ряду фізичних і геометричних характеристик маятника та електродвигуна [14].

Рис. 1. Фазопараметрична характеристика при $D \in [-1,45; -1,35]$



3. Сценарії переходу до хаосу. Для дослідження сценаріїв переходу до хаосу максимальних атракторів покладемо такі значення параметрів: $C = -0,5$, $E = -0,45$, $F = 0,5$, а параметр D візьмемо як біфуркаційний і побудуємо фазопараметричну характеристику (рис. 1) одного з представників максимального атрактора.

Як видно з рис. 1, ми маємо класичне біфуркаційне дерево класичного атрактора. Тобто окремі гілки цього біфуркаційного дерева відповідають періодичним граничним множинам, а щільно заштриховані області — хаотичним граничним множинам. Крім того, на цьому рисунку ми можемо спостерігати сценарії переходів до хаосу, притаманні атракторам у класичному розумінні цього терміну, зокрема сценарій Фейгенбаума, сценарій Помо—Маневілля та сценарій узагальненої переміжності.

Але виникає питання, що відбувається з іншими представниками максимального атрактора та з максимальним атрактором як таким. Максимальний атрактор у вигляді сімейства неізольованих граничних множин існує на всьому проміжку, на якому представлена фазопараметрична характеристика. Більше того, кожен представник максимального атрактора має один і той самий спектр ЛХП, а тому є сенс говорити про ЛХП максимального атрактора як такого.

З'ясуємо, як відбувається перехід до хаосу для максимальних атракторів. Почнемо зі значення $D = -1,36$ і рухатимемося в бік зменшення біфуркаційного параметра. За цього значення параметра максимальний атрактор складається з незліченної кількості періодичних граничних множин, кожна з яких має один і той самий період та однакові ЛХП, сигнатура спектра яких, зокрема, має вигляд $\langle 0, 0, -, -, - \rangle$. Далі, у разі зменшення біфуркаційного параметра до $D = -1,37$ період усіх представників максимального атрактора подвоюється. У разі ж подальшого зменшення до $D = -1,38$ період всіх представників максимального атрактора знов подвоюється. Цей ланцюг продовжується нескінченно аж до значення $D = -1,381$, за якого в системі народжується сімейство хаотичних граничних множин, а тому і хаотичний максимальний атрактор. Сигнатура спектра ЛХП такого максимального атрактора має вигляд $\langle +, 0, 0, -, - \rangle$. Таким чином, маємо класичний сценарій переходу до хаосу Фейгенбаума [1, 2], який має місце й у випадку максимального атрактора.

Розглянемо, як реалізується сценарій Помо—Маневілля [3, 4] у випадку максимального атрактора. Нехай біфуркаційний параметр $D = -1,41$. У системі існує періодичний максимальний атрактор. У разі незначного збільшення ($D = -1,40915$) це сімейство періодичних граничних множин руйнується і в системі виникає новий хаотичний максимальний атрактор. Розподіли інваріантної міри зазначених сімейств наведено на рис. 2. На цих розподілах

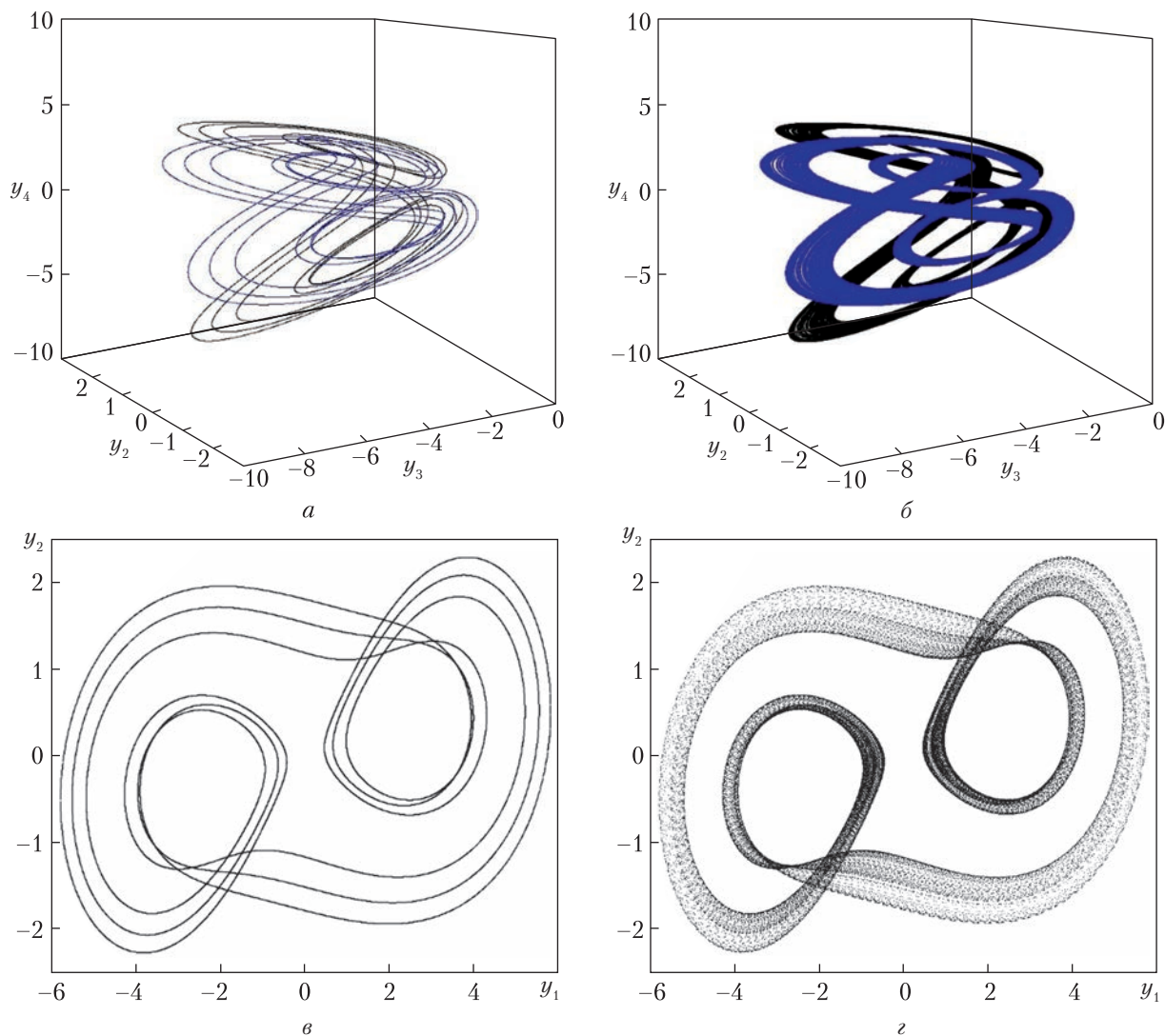


Рис. 2. Проекції фазових портретів при $D = -1,41$ (а) і $D = -1,40915$ (б). Розподіл природної інваріантної міри при $D = -1,41$ (в) і $D = -1,40915$ (г)

можна спостерігати, що більш темними ділянками зображується область, що нагадує деякий окіл розподілу природної інваріантної міри зниклої періодичної граничної множини. Це свідчить про те що перехід відбувся через переміжність за одну жорстку біфуркацію. Ламінарній фазі відповідає близька до періодичних динаміка в околі зниклої періодичної граничної множини, а турбулентній — непередбачувані моменти, коли траєкторія залишає близький окіл зниклого періодичного представника максимального атратора.

Наостанок розглянемо реалізацію сценарію узагальненої переміжності [6–9] для випадку максимального атратора. Якщо $D = -1,42$, у системі “сферичний маятник — електродвигун” існує хаотичний максимальний атратор і вже у разі $D = -1,425$ внаслідок переміжності, існуюче хаотичне сімейство руйнується і виникає хаотичний максимальний атратор іншого типу. На рис. 3, в, г наведені розподіли природної інваріантної міри для зазначених

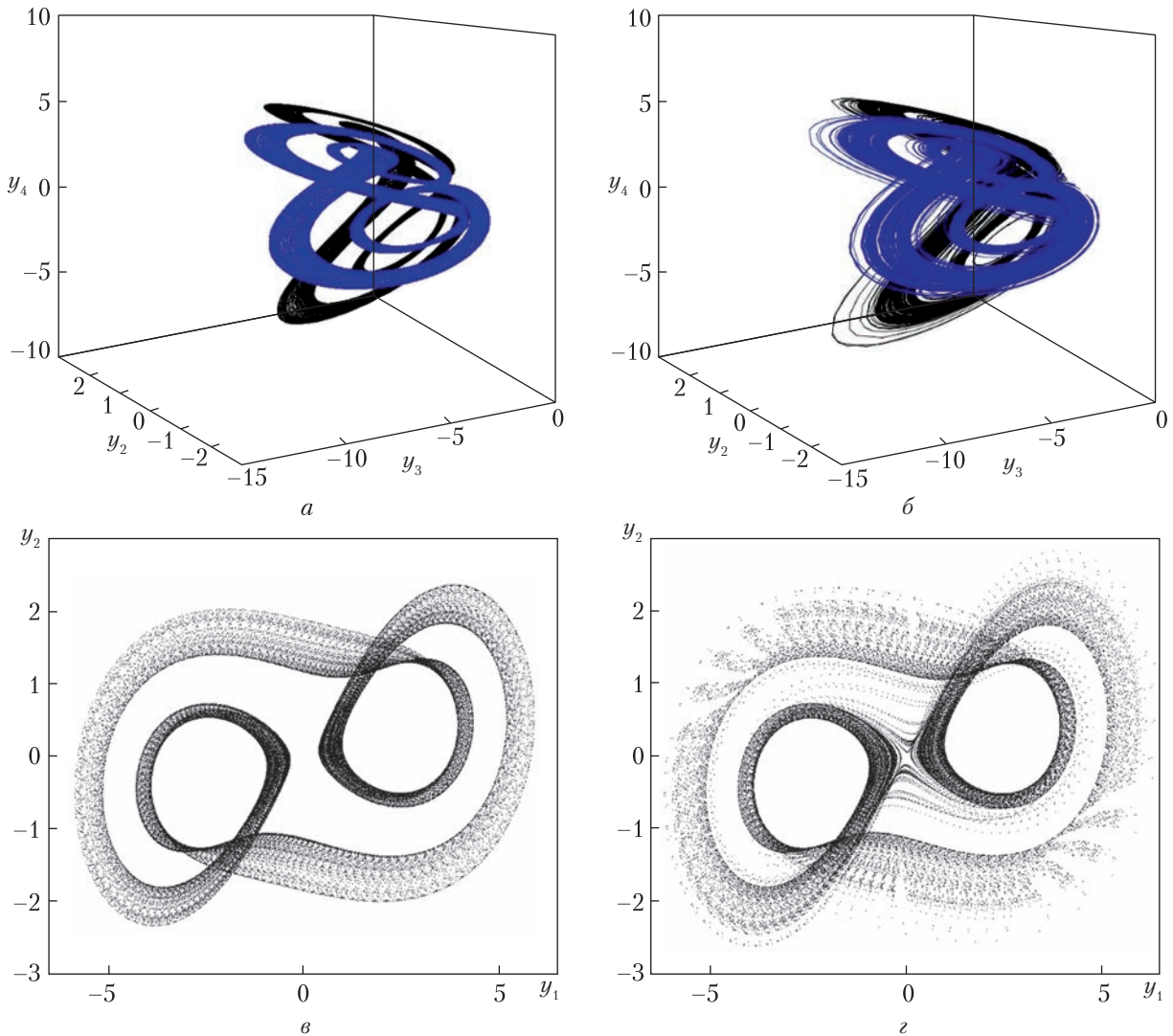


Рис. 3. Проекції фазових портретів при $D = -1,42$ (а) і $D = -1,425$ (б). Розподіл природних інваріантних мір при $D = -1,42$ (в) і $D = -1,425$ (г)

максимальних атракторів. На рис. 3, б можна бачити затемнену ділянку, що нагадує зниклий хаотичний максимальний атрактор. Це свідчить про те, що новоутворений хаотичний максимальний атрактор з'явився внаслідок переміжності з руйнуванням існуючого раніше атрактора. Причому зниклий максимальний атрактор являє собою груболамінарну фазу новоутвореного сімейства граничних множин, тоді як турбулентна фаза характеризується більш світлими ділянками на розподілі інваріантної міри (див. рис. 3, г), коли траєкторія залишає окіл зниклого максимального атрактора.

Висновки. Таким чином, незважаючи на те, що максимальні атрактори не є атракторами в традиційному розумінні цього терміну, перехід до хаосу для максимальних атракторів відбувається за сценаріями, аналогічними сценаріям переходу до хаосу, притаманним “класичним” атракторам.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Feigenbaum M.J. Quantative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 1978. **19**, № 1. P. 25–52. <https://doi.org/10.1007/BF01020332>
2. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 1979. **21**, № 6. P. 669–706. <https://doi.org/10.1007/BF01107909>
3. Manneville P., Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Phys. D.: Nonlinear Phenom.* 1980. **1**, № 2. P. 219–226. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(80\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(80)90013-5)
4. Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.* 1980. **74**, № 2. P. 189–197. <https://doi.org/10.1007/BF01197757>
5. Кузнецов С.П. Динамический хаос. Москва: Физматлит, 2006. 356 с.
6. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations. *J. Fluids Struct.* 1994. **8**, № 1. P. 1–18. <https://doi.org/10.1006/jfls.1994.1001>
7. Krasnopolskaya T.S., Shvets A.Yu. Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *J. Sound Vibr.* 2009. **322**, № 3. P. 532–553. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.007>
8. Shvets A.Yu., Sirenko V.A. Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems. *J. Math. Sci.* 2019. **243**, № 2. P. 338–346. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04543-z>
9. Shvets A. Over view of scenarios of transition to chaos in nonideal dynamic systems. *Chaotic modeling and simulation: Proceedings of the 13th International Conference CHAOS 2020 (9–12 june, 2020)*. Cham: Springer, 2021. P. 853–864. https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_59
10. Shvets A., Donetskyi S. New types of limit sets in the dynamic system “Spherical Pendulum—Electric Motor”. *Nonlinear Mechanics of Complex Structures: Altenbach H., Amabili M., Mikhlin Y.V. (Eds)*. Cham: Springer, 2021. P. 443–455. (Advanced Structured Materials, Vol. 157). https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25
11. Milnor J. On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.* 1985. **99**. P. 177–195. <https://doi.org/10.1007/BF01212280>
12. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е. Лекции по нелинейной динамике. Москва, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011. 516 с.
13. Kononenko V.O. Vibrating system with a limited power-supply. London: Iliffe, 1969. 236 p.
14. Krasnopolskaya T.S, ShvetsA.Yu. Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with energy source. *Int. Appl. Mech.* 1992. **28**. P. 669–674. <https://doi.org/10.1007/BF00846923>

Надійшло до редакції 02.02.2022

REFERENCES

1. Feigenbaum, M. J. (1978). Quantative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 19, No. 1, pp. 25-52. <https://doi.org/10.1007/BF01020332>
2. Feigenbaum, M. J. (1979). The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 21, No. 6, pp. 669-706. <https://doi.org/10.1007/BF01107909>
3. Manneville, P. & Pomeau, Y. (1980). Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. *Phys. D.: Nonlinear Phenom.*, 1, No. 2, pp. 219-226. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(80\)90013-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(80)90013-5)
4. Pomeau, Y. & Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Commun. Math. Phys.*, 74, No. 2, pp. 189-197. <https://doi.org/10.1007/BF01197757>
5. Kuznetsov, S. P. (2006). Dynamical chaos. Moscow: Fizmatlit (in Russian).
6. Krasnopolskaya, T. S. & Shvets, A. Yu. (1994). Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations. *J. Fluids Struct.*, 8, No. 1, pp. 1-18. <https://doi.org/10.1006/jfls.1994.1001>
7. Krasnopolskaya, T. S. & Shvets, A. Yu. (2009). Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks. *J. Sound Vibr.*, 322, No. 3, pp. 532-553. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.09.007>
8. Shvets, A. Yu. & Sirenko, V. A. (2019). Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems. *J. Math. Sci.*, 243, No. 2, pp. 338-346. <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04543-z>
9. Shvets, A. (2020, June). Over view of scenarios of transition to chaos in nonideal dynamic systems. Proceedings of the 13th International Conference Chaotic modeling and simulation (CHAOS 2020) (pp. 853-864). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-70795-8_59

10. Shvets, A. & Donetskyi, S. (2021). New types of limit sets in the dynamic system “Spherical Pendulum—Electric Motor”. In Altenbach, H., Amabili, M. & Mikhlin Y. V. (Eds). Nonlinear mechanics of complex structures, Advanced structured materials (Vol. 157) (pp. 443-455). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-75890-5_25
11. Milnor J. On the concept of attractor. *Commun. Math. Phys.* 1985. **99**. P. 177—195. <https://doi.org/10.1007/BF01212280>
12. Anischenko, V. S. & Vadivasova, T. E. (2011). Lectures on nonlinear dynamics. Moscow, Izhevsk: Research Center “Regular and Chaotic Dynamics” (in Russian).
13. Kononenko, V. O. (1969). Vibrating system with a limited power-supply. London: Iliffe.
14. Krasnopolskaya, T. S, Shvets, A. Yu. (1992). Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with energy source. *Int. Appl. Mech.*, 28, pp. 669-674. <https://doi.org/10.1007/BF00846923>

Received 02.02.2022

S.V. Donetskyi, <https://orcid.org/0000-0002-9094-0885>

A.Yu. Shvets, <https://orcid.org/0000-0003-0330-5136>

NTU of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”

E-mails: dsvshka@gmail.com, aleksandrshvetski@gmail.com

BIFURCATION OF MAXIMAL ATTRACTORS IN NONIDEAL PENDULUM SYSTEMS

Scenarios of transition to chaos were studied for maximal attractors in dynamic systems of a type “spherical pendulum – electromotor with limited power”. It is established that transition to chaos for maximal attractors occurs according to classical scenarios in nonlinear dynamics, despite the fact that maximal attractors are not attractors in the traditional sense of the term.

Keywords: *dynamical chaos, scenarios of transition to chaos, maximal attractor.*