https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.03.029
УДК 539.3

О.Ю. Чирков, https://orcid.org/0000-0003-1916-0277

Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, Київ
E-mail: chirkale82@gmail.com

Збіжність однокрокового ітераційного процесу в задачах механіки непружного деформування, в яких враховується історія навантаження

Представлено академіком НАН України В.В. Харченком

Розглядається однокроковий ітераційний процес розв'язання нелінійних крайових задач механіки непружного деформування, в яких враховується історія навантаження. За таких умов напружено-деформований стан залежить від історії навантаження і процес деформування повинен простежуватися на всьому досліджуваному інтервалі часу. Процес навантаження розбивається на окремі розрахункові етапи і для кожного з них крайова задача формулюється у вигляді нелінійного операторного рівняння в гільбертовому просторі. Початкові деформації в цьому рівнянні включають температурні, структурні та накопичені незворотні деформації на початок етапу навантаження. Незворотні деформації залежать від процесу деформування і визначаються з урахуванням історії навантаження. Аналіз збіжності ітераційних методів розв'язання нелінійних крайових задач, в яких враховується деформаційна історія навантаження, обмежуються зазвичай доведенням збіжності послідовних наближень для поточного етапу навантаження. Відомі оцінки збіжності методів пружних розв'язків і змінних параметрів пружності не враховують похибку обчислення початкових деформацій, які залежать від історії непружного деформування і визначаються на основі наближеного розв'язання крайової задачі на попередніх етапах навантаження ітераційними методами. Фактично на кожному етапі навантаження замість вихідної крайової задачі, сформульованої у вигляді нелінійного операторного рівняння, розв'язується наближене рівняння, в якому враховується похибка обчислення незворотних деформацій за результатами розрахунків на попередніх етапах навантаження. Отже, відомі апріорні оцінки збіжності методів пружних розв'язків і змінних параметрів пружності встановлюють збіжність послідовних наближень саме до розв'язку цього наближеного рівняння. У цьому повідомленні викладено деякі аспекти, пов'язані з аналізом збіжності однокрокового ітераційного процесу, а також доведено оцінку збіжності послідовних наближень з урахуванням історії навантаження.

Ключові слова: *непружне деформування, крайова задача, незворотні деформації, ітераційний процес, збіжність і точність послідовних наближень.*

Цитування: Чирков О.Ю. Збіжність однокрокового ітераційного процесу в задачах механіки непружного деформування, в яких враховується історія навантаження. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2022. № 3. С. 29—38. https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.03.029

Задачі механіки непружного деформування складаються з трьох основних типів: статичні задачі, засновані на рівняннях стану матеріалу, в яких час t виступає тільки в якості параметра; еволюційні квазістатичні задачі, що використовують рівняння стану, які описують процес деформування матеріалу на всьому досліджуваному інтервалі часу з урахуванням історії навантаження; динамічні задачі, що формулюються з урахуванням сил інерції.

Ітераційні методи розв'язання нелінійних задач першого типу досить докладно наведено в монографії [1]. Це стосується, зокрема, ітераційних методів пружних розв'язків [2] і змінних параметрів пружності [3], які характеризуються лінійною збіжністю ітераційного процесу, а також метода Ньютона та його модифікацій [1], які забезпечують надлінійну швидкість збіжності послідовних наближень.

Разом із тим публікації, присвячені ітераційним методам розв'язання нелінійних крайових задач, в яких враховується деформаційна історія навантаження, обмежуються зазвичай аналізом збіжності послідовних наближень для поточного етапу навантаження. Відомі оцінки збіжності методів пружних розв'язків і змінних параметрів пружності, що наведені в [4—6] та ін., не враховують похибку обчислення початкових деформацій, які залежать від історії непружного деформування. Розгляду цих питань і присвячено це повідомлення, в якому викладено деякі аспекти, пов'язані з аналізом збіжності послідовних наближень, а також доведено оцінку збіжності ітераційного процесу, в який враховано історію навантаження.

Нижче розглядається узагальнена крайова задача механіки непружного деформування з урахуванням історії навантаження у квазістатичній постановці. Вважаємо, що для поточного етапу навантаження крайову задачу можна сформулювати у вигляді нелінійного операторного рівняння стосовно переміщень $\boldsymbol{u}(t)$:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{u}(t), \xi(t)) = \boldsymbol{f}(t); \quad \boldsymbol{u}(t) \in U, \tag{1}$$

де $\mathcal{A}$ — нелінійний оператор, який здійснює відображення гільбертового простору U в спряжений простір U^*; $\boldsymbol{f}(t)$ — елемент, асоційований з роботою зовнішніх навантажень, які діють на тіло; $\xi(t)$ — початкові деформації середовища, що включають температурні, структурні та накопичені незворотні деформації на початок етапу навантаження. Для будь-якого часу t зовнішні навантаження $\boldsymbol{f}(t)$ є елементами простору U^*, а початкові деформації $\xi(t)$ — елементами гільбертового простору L. Незворотні деформації в рівнянні (1) залежать від процесу деформування і визначаються з урахуванням історії навантаження.

Вважаємо, що оператор $\mathcal{A}$ має властивості сильної монотонності та ліпшиць-неперервності [1], тобто існують два додатних числа m_0, M_0 таких, що для будь-якого $\xi \in L$ справедливі нерівності

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{A}(\boldsymbol{v}, \xi) - \mathcal{A}(\boldsymbol{w}, \xi), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \rangle \geqslant m_0 \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|_U^2, \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U; \\ &\|\mathcal{A}(\boldsymbol{v}, \xi) - \mathcal{A}(\boldsymbol{w}, \xi)\|_{U^*} \leqslant M_0 \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|_U, \qquad \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U. \end{aligned} \tag{2}$$

Окрім того, збурення вихідних даних за початковими деформаціями задовольняє умову ліпшиць-неперервності, тобто існує додатна стала N_0 така, що для будь-якого $\boldsymbol{v} \in U$ виконується нерівність

$$\| \mathcal{A}(\boldsymbol{v}, \xi) - \mathcal{A}(\boldsymbol{v}, \zeta) \|_{U^*} \leqslant N_0 \| \xi - \zeta \|_L, \qquad \forall \xi, \zeta \in L. \tag{3}$$

З властивостей оператора $\mathcal{A} : U \to U^*$, зазначених вище, та загальних результатів щодо сильно-монотонних та ліпшиць-неперервних операторів [1] випливає однозначний розв'язок операторного рівняння (1), а також його безперервна залежність від зовнішніх навантажень $\boldsymbol{f}(t) \in U^*$ та початкових деформацій $\xi(t) \in L$.

Виконання нерівностей (2), (3) передбачає деякі припущення щодо властивостей функції $\sigma = \varphi(\varepsilon)$, яка описує криву деформування, і відповідно січного $G_s(\varepsilon)$ та дотичного $G_\tau(\varepsilon)$ модулів зсуву матеріалу. Припускаємо, що матеріал ізотропний, а тіло Ω може бути неоднорідним, тому його пружні та пластичні властивості можуть залежати від координат $\boldsymbol{x} \in \Omega$. Функція $\boldsymbol{x} \to \varphi(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ вимірна, а $\boldsymbol{x} \to G_s(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ вимірна і обмежена, причому $G_s(\varepsilon) \leqslant G_0$ для всіх можливих значень ε, де G_0 — модуль зсуву на пружній ділянці діаграми деформування матеріалу. Окрім того, функція $\varepsilon \to \varphi(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ неперервна і має похідну $d\varphi(\varepsilon)/d\varepsilon > 0$ для всіх ε. За таких умов, крива деформування спрямована опуклістю вгору і не має точок перегину, тому виконуються наступні умови, прийнятні для більшості конструкційних матеріалів: $0 < G_\tau(\varepsilon) \leqslant G_s(\varepsilon) \leqslant G_0$.

Зауважимо, що збіжність послідовних наближень до розв'язку рівняння (1) необхідно довести з урахуванням похибки вихідних даних за початковими деформаціями середовища. Дійсно, початкові деформації ξ на поточному етапі навантаження включають накопичені незворотні деформації, які визначаються за результатами розрахунків на попередніх етапах навантаження. З цього випливає, що незворотні деформації визначаються наближено, оскільки вони включають похибку, зумовлену наближеним розв'язанням рівняння (1) на кожному етапі навантаження ітераційним методом.

Отже, замість рівняння (1) приходимо до наближеного рівняння, в якому враховується похибка вихідних даних за початковими деформаціями $\tilde{\xi}$:

$$\mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\xi}) = \boldsymbol{f}, \quad \tilde{\boldsymbol{u}} \in U. \tag{4}$$

Оцінимо зверху похибку $\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u} \in U$. З використанням першої нерівності (2) та рівняння (4) маємо

$$m_0 \| \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u} \|_U^2 \leqslant \langle \mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \xi) - \mathcal{A}(\boldsymbol{u}, \xi), \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u} \rangle = \langle \mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \xi) - \mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{\xi}), \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u} \rangle, \tag{5}$$

звідки з урахуванням нерівності Коші—Буняковського—Шварца, а також нерівності (3) приходимо до оцінки

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u} \|_U \leqslant \frac{N_0}{m_0} \| \tilde{\xi} - \xi \|_L . \tag{6}$$

Припустимо, що на кожному етапі навантаження для розв'язання нелінійного рівняння (3) застосовується однокроковий ітераційний процес, зокрема, метод пружних розв'язків або змінних параметрів пружності. Тоді послідовність наближень $\{\tilde{\boldsymbol{u}}^k\}_{k=1}^{\infty}$ будується у вигляді такої ітераційної процедури:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{u}}^k - \alpha \mathsf{K}^{-1}(\mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}^k, \tilde{\xi}) - \boldsymbol{f}), \tag{7}$$

де $\alpha > 0$ — числовий параметр, що вводиться для управління збіжністю процесу, який може змінюватися від ітерації до ітерації; K — коерцитивний оператор, який здійснює відображення з U в U^*. У загальному випадку оператор K визначається з урахуванням наближення $\tilde{\boldsymbol{u}}^k \in U$.

Ітераційний процес (7) можна трактувати як метод поправок:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}^{k+1} = \tilde{\boldsymbol{u}}^k - \alpha \Delta \tilde{\boldsymbol{u}}^k; \qquad \mathsf{K} \Delta \tilde{\boldsymbol{u}}^k = \mathcal{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}^k, \tilde{\xi}) - \boldsymbol{f}, \tag{8}$$

де $\Delta \tilde{\boldsymbol{u}}^k$ — поправка для $k+1$-й ітерації.

Зазначимо, що в методі пружних розв'язків оператор K відповідає лінійно-пружній задачі з початковими модулями пружності матеріалу. У методі змінних параметрів пружності оператор $\mathsf{K}(\tilde{\boldsymbol{u}}^k)$ перетворюється на кожній ітерації внаслідок перерахунку модулів пружності матеріалу. Для обох методів поправка $\Delta \tilde{\boldsymbol{u}}^k$ визначається на основі розв'язання пружної задачі з початковими або перерахованими модулями пружності матеріалу.

Оскільки на кожному етапі навантаження замість (1) розв'язується наближене рівняння (3), оцінка збіжності ітераційного процесу (7) встановлює збіжність послідовних наближень $\tilde{\boldsymbol{u}}^k$ саме до розв'язку рівняння (3). Апріорна оцінка збіжності методу пружних розв'язків за будь-яким початковим наближенням, а також оцінка локальної збіжності методу змінних параметрів пружності наведені в [4—6]. На підставі цих оцінок, а також за певних умов, пов'язаних з початковим наближенням $\tilde{\boldsymbol{u}}^0$, можемо записати апріорну оцінку швидкості збіжності ітераційного процесу (7) у вигляді

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}}^k - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_U \leqslant C_0 q^k \| \tilde{\boldsymbol{u}}^0 - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_U, \tag{9}$$

де стала $C_0 > 0$ залежить від методу, яким виконуються послідовні наближення; $q < 1$ — множник, що характеризує швидкість збіжності ітераційного процесу. З оцінки (9) випливає, що U-норма похибки $\tilde{\boldsymbol{u}}^k - \tilde{\boldsymbol{u}}$ зменшується, як геометрична прогресія зі знаменником q.

Оцінимо зверху похибку $\tilde{\boldsymbol{u}}^k - \boldsymbol{u}$ із використанням нерівності трикутника

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}}^k - \boldsymbol{u} \|_U \leqslant \| \tilde{\boldsymbol{u}}^k - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_U + \| \tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u} \|_U, \tag{10}$$

звідки з урахуванням оцінок (6), (9) знаходимо

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}}^k - \boldsymbol{u} \|_U \leqslant C_0 q^k \| \tilde{\boldsymbol{u}}^0 - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_U + \frac{N_0}{m_0} \| \tilde{\xi} - \xi \|_L. \tag{11}$$

Якщо для оцінки норми в першому доданку правої частини нерівності (11) використовувати нерівність трикутника і оцінку (6), то одержимо

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}}^0 - \tilde{\boldsymbol{u}} \|_U \leqslant \| \tilde{\boldsymbol{u}}^0 - \boldsymbol{u} \|_U + \frac{N_0}{m_0} \| \tilde{\xi} - \xi \|_L. \tag{12}$$

Тоді нерівність (11) набуває вигляду

$$\|\tilde{\boldsymbol{u}}^k - \boldsymbol{u}\|_U \leqslant C_0 q^k \|\tilde{\boldsymbol{u}}^0 - \boldsymbol{u}\|_U + \frac{N_0}{m_0}\|\tilde{\xi} - \xi\|_L \,. \tag{13}$$

де враховано, що в реальному ітераційному процесі кількість необхідних ітерацій задається таким, що виконується умова $C_0 q^k << 1$.

Оцінимо зверху другий доданок у правій частині нерівності (13). Для цього врахуємо, що на поточному етапі навантаження, який відповідає часу t_m , похибка обчислення початкових деформацій $\tilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m)$ має вигляд

$$\tilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m) = (\tilde{\varepsilon}_D^n)^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D^n(t_{m-1}), \tag{14}$$

де ε_D^n — девіатор незворотних деформацій; k_{m-1} — кількість ітерацій для розв'язання задачі на попередньому етапі навантаження, який визначається часом t_{m-1} . Оскільки незворотні деформації визначаються, як різниця між повними і пружними деформаціями, приходимо до співвідношення

$$(\tilde{\varepsilon}_D^n)^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D^n(t_{m-1}) = \tilde{\varepsilon}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D(t_{m-1}) - \tag{15}$$

$$- \frac{1}{2G_0}(\tilde{\sigma}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \sigma_D(t_{m-1})),$$

де ε_D — девіатор повних деформацій; σ_D — девіатор напружень.

Різницю напружень в правій частині (15) запишемо з використанням оператора $\mathcal{P}$, який встановлює взаємно-однозначну відповідність між напруженнями і деформаціями у вигляді визначальних рівнянь:

$$\tilde{\sigma}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \sigma_D(t_{m-1}) = \mathcal{P}(\varepsilon_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}), \tilde{\xi}_D(t_{m-1})) - \tag{16}$$

$$-\mathcal{P}(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})).$$

Тоді згідно із (15), (16) можемо записати

$$(\varepsilon_D^n)^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D^n(t_{m-1}) = \mathsf{Z}(\tilde{\varepsilon}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}), \tilde{\xi}_D(t_{m-1})) - \tag{17}$$

$$-\mathsf{Z}(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})).$$

де Z — оператор обчислення незворотних деформацій,

$$\mathsf{Z}(\varepsilon_D, \xi_D) = \varepsilon_D - \frac{1}{2G_0}\mathcal{P}(\varepsilon_D, \xi_D). \tag{18}$$

З використанням нерівності трикутника і формули скінченних приростів [3] приходимо до оцінки

$$
\begin{aligned}
&\|(\tilde{\varepsilon}_D^n)^{k_{m-1}}(t_{m-1})-\varepsilon_D^n(t_{m-1})\|_L \leqslant \\
&\leqslant \sup_{\mu_D\in L}\|Z'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D(t_{m-1}))\|_L\|\tilde{\varepsilon}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1})-\varepsilon_D(t_{m-1})\|_L + \\
&+\sup_{\eta_D\in L}\|Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D(t_{m-1}),\eta_D)\|_L\|\tilde{\xi}_D(t_{m-1})-\xi_D(t_{m-1})\|_L,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

де $Z'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D), Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)$ — похідні Фріше оператора Z в точці $(\mu_D,\tilde{\xi}_D)$ і (ε_D,η_D) відповідно, які визначаються на підставі виразу (18):

$$
\begin{aligned}
&Z'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D)\chi_D=\chi_D-\frac{1}{2G_0}\mathcal{P}'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D)\chi_D, \qquad \forall\chi_D\in L; \\
&Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)\zeta_D=-\frac{1}{2G_0}\mathcal{P}'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)\zeta_D, \qquad \forall\zeta_D\in L.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Далі будемо розглядати довільні тензори напружень і деформацій в точці тіла, як елементи евклідового простору $\mathbb{E}$, в якому скалярний добуток визначається згорткою відповідних тензорів $(\cdot,\cdot)$. Тоді нормою, асоційованою з цим скалярним добутком, є модуль тензора $\|\cdot\|$. Окрім того, областю визначення операторів $Z'_{\varepsilon}, Z'_{\hat{\imath}}$ є не вся множина можливих деформацій $\mathbb{E}$, а тільки її більш вузька підмножина $\mathbb{E}_D$, яка складається з девіаторних компонент тензорів деформацій.

Отже, для будь-яких елементів $\chi_D,\zeta_D,\psi_D\in\mathbb{E}_D$, маємо

$$
\begin{aligned}
&(Z'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D)\chi_D,\psi_D)=(\chi_D,\psi_D)-\frac{1}{2G_0}(\mathcal{P}'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D)\chi_D,\psi_D); \\
&(Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)\zeta_D,\psi_D)=-\frac{1}{2G_0}(\mathcal{P}'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)\text{æ}_D,\text{ø}_D).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Зокрема, для рівнянь пластичності та радіаційної повзучості вирази для похідних оператора $\mathcal{P}$ визначаються таким чином [7]:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{P}'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D)\chi_D,\psi_D)=2G_s(\chi_D,\psi_D)+2(G_\tau-G_s)\frac{(\mu_D-\tilde{\xi}_D,\chi_D)(\mu_D-\tilde{\xi}_D,\psi_D)}{\|\mu_D-\tilde{\xi}_D\|^2}; \\
&(\mathcal{P}'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)\zeta_D,\psi_D)=-2G_s(\zeta_D,\psi_D)+2(G_s-G_\tau)\frac{(\varepsilon_D-\eta_D\text{ø}\zeta_D)(\varepsilon_D-\eta_D,\ \ {}_D)}{\|\varepsilon_D-\eta_D\|^2}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Тоді співвідношення (21) набувають вигляду

$$
\begin{aligned}
&(Z'_{\varepsilon}(\mu_D,\tilde{\xi}_D)\chi_D,\psi_D)=(1-\phi_2)(\chi_D,\psi_D)+(\phi_2-\phi_1)\frac{(\mu_D-\tilde{\xi}_D,\chi_D)(\mu_D-\tilde{\xi}_D,\psi_D)}{\|\mu_D-\tilde{\xi}_D\|^2}; \\
&(Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D,\eta_D)\zeta_D,\psi_D)=\phi_2(\zeta_D,\psi_D)-(\phi_2-\phi_1)\frac{(\varepsilon_D-\eta_D,\zeta_D)(\varepsilon_D-\eta_D,\psi_D)}{\|\varepsilon_D-\eta_D\|^2},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

де сталі ϕ_1, ϕ_2 задаються формулами:

$$\phi_1 = \frac{G_\tau}{G_0}; \quad \phi_2 = \frac{G_s}{G_0}, \quad 0 < \phi_1 \leqslant \phi_2 \leqslant 1. \tag{24}$$

На основі (23) приходимо до висновку, що $Z'_\varepsilon, Z'_{\hat{\imath}}$ — самоспряжені оператори, і тому їх норма визначається виразами

$$\| Z'_\varepsilon(\mu_D, \tilde{\xi}_D) \|_L = \sup_{\psi_D \in L} \frac{|(Z'_\varepsilon(\mu_D, \tilde{\xi}_D)\psi_D, \psi_D)_L|}{\| \psi_D \|_L^2}; \tag{25}$$

$$\| Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D, \eta_D) \|_L = \sup_{\zeta_D \in L} \frac{|(Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D, \eta_D)\zeta_D, \zeta_D)_L|}{\| \zeta_D \|_L^2}.$$

З урахуванням співвідношень (23) одержимо

$$(Z'_\varepsilon(\mu_D, \tilde{\xi}_D)\psi_D, \psi_D) = (1 - \phi_2)\| \psi_D \|^2 + (\phi_2 - \phi_1)\frac{(\mu_D - \tilde{\xi}_D, \psi_D)^2}{\| \mu_D - \tilde{\xi}_D \|^2}; \tag{26}$$

$$(Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D, \eta_D)\zeta_D, \zeta_D) = \phi_2 \| \zeta_D \|^2 - (\phi_2 - \phi_1)\frac{(\varepsilon_D - \eta_D, \zeta_D)^2}{\| \varepsilon_D - \eta_D \|^2}.$$

Оскільки другий доданок у правій частині першої рівності (26) додатний, а від'ємник у правій частині другої рівності (26) також додатний, то відповідно до нерівності Коші—Буняковського—Шварца [1] приходимо до оцінок

$$|(Z'_\varepsilon(\mu_D, \tilde{\xi}_D)\psi_D, \psi_D)| \leqslant (1 - \phi_1)\| \psi_D \|^2, \tag{27}$$

$$|(Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D, \eta_D)\zeta_D, \zeta_D)| \leqslant \phi_2 \| \zeta_D \|^2.$$

Відповідно до (25) і (27) знаходимо

$$\| Z'_\varepsilon(\mu_D, \tilde{\xi}_D) \|_L \leqslant 1 - \phi_{01}; \quad \| Z'_{\hat{\imath}}(\varepsilon_D, \eta_D) \|_L \leqslant 1 - \phi_{02}, \tag{28}$$

де сталі ϕ_{01}, ϕ_{02} задаються за співвідношеннями:

$$\phi_{01} = \operatorname{ess.}\inf_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \phi_1(\boldsymbol{x}) > 0; \quad \phi_{02} = \operatorname{ess.}\sup_{\boldsymbol{x} \in \Omega} \phi_2(\boldsymbol{x}) \leqslant 1. \tag{29}$$

На підставі (14), (19), (28) приходимо до нерівності

$$\| \tilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m) \|_L \leqslant (1 - \phi_{01}) \| \tilde{\varepsilon}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D(t_{m-1}) \|_L + \tag{30}$$

$$+ \phi_{02} \| \tilde{\xi}(t_{m-1}) - \xi(t_{m-1}) \|_L,$$

Якщо для оцінки норми у першому доданку правої частини (30) використати нерівність

$$\| \tilde{\varepsilon}_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D(t_{m-1}) \|_L \leqslant \| \tilde{\boldsymbol{u}}^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \boldsymbol{u}(t_{m-1}) \|_U, \tag{31}$$

то з урахуванням оцінки (13) одержимо

$$\| \tilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m) \|_L \leqslant C_1 q^{k_{m-1}} \| \tilde{\boldsymbol{u}}^0(t_{m-1}) - \boldsymbol{u}(t_{m-1}) \|_U + \tag{32}$$

$$+ C_2 \| \tilde{\xi}(t_{m-1}) - \xi(t_{m-1}) \|_L,$$

де C_1, C_2 — додатні сталі,

$$C_1 = C_0(1 - \phi_{01}), \qquad C_2 = \phi_{02} + \frac{N_0}{m_0}(1 - \phi_{01}). \tag{33}$$

Якщо у формулі (32) кожне $\tilde{\xi}(t_{m-1}) - \xi(t_{m-1})$ записати через попереднє, то одержимо нерівність

$$\| \tilde{\xi}(t_n) - \xi(t_n) \|_L \leqslant \sum_{1 \leqslant m \leqslant n-1} C(t_m) q^{k_m}, \tag{34}$$

де $C(t_m)$ — додатні коефіцієнти,

$$C(t_m) = C_1 C_2^{n-m+1} \| \tilde{\boldsymbol{u}}^0(t_m) - \boldsymbol{u}(t_m) \|_U. \tag{35}$$

На підставі (13), (34) приходимо до оцінки сумарної похибки для переміщень наприкінці етапу навантаження:

$$\| \tilde{\boldsymbol{u}}^k(t_n) - \boldsymbol{u}(t_n) \|_U \leqslant C_0 q^k \| \tilde{\boldsymbol{u}}^0(t_n) - \boldsymbol{u}(t_n) \|_U + \tag{36}$$

$$+ \frac{N_0}{m_0} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n-1} C(t_m) q^{k_m}.$$

Отже, основний висновок за результатами аналізу складається з наступного. Оцінка (36) дозволяє встановити збіжність однокрокових ітераційних процесів, зокрема методів пружних розв'язків і змінних параметрів пружності, стосовно задач механіки непружного деформування з урахуванням початкових деформацій, які залежать від історії навантаження. Згідно з оцінкою (36) точність розв'язку задачі на початкових етапах навантаження, а також протяжність етапів навантаження повинні бути достатніми, щоб не допустити впливу зростання перших коефіцієнтів $C(t_m)$ у розкладі сумарної похибки для початкових деформацій на точність розв'язку задачі на наступних етапах навантаження.

Ця вимога зумовлена тим, що в разі розвинених незворотних деформацій стала C_2 більша одиниці, і тому зі збільшенням етапів навантаження відбувається зростання за степеневим законом коефіцієнтів $C(t_m)$ у розкладі сумарної похибки наближеного розв'язку задачі, що випливає з формул (35), (36). Оскільки максимальні за величиною коефіцієнти $C(t_m)$ відповідають початковим етапам навантаження, кількість ітерацій для них повинно бути такою, щоб результат множення $C(t_m)q^{k_m}$ був набагато менше одиниці, що забезпечить необхідну точність розв'язку задачі на наступних етапах навантаження.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative Solution if Nonlinear Equations in Several Variables. New York; London: Academic Press, 1970. 592 p.
2. Ильюшин А.А. Основы общей математической теории пластичности. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 270 с.
3. Биргер И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности. *Прикл. математика и механика*. 1951. **15**, № 6. С. 765—770.
4. Темис Ю.М. Сходимость метода переменных параметров упругости при численном решении задач пластичности методом конечных элементов. Прикладные проблемы прочности и пластичности: Статика и динамика деформируемых систем. Москва: Наука, 1982. С. 21—34.
5. Уманский С.Э. Оптимизация приближенных методов решения краевых задач механики. Киев: Наук. думка, 1983. 168 с.
6. Чирков А.Ю. Итерационные алгоритмы решения краевых задач теории малых упругопластических деформаций на основе смешанного метода конечных элементов. *Пробл. прочности*. 2005. № 3. С. 111—127.
7. Чирков О.Ю. Коректність рівнянь радіаційної повзучості, що враховують напруження і накопичену незворотну деформацію в моделі радіаційного розпухання опроміненого матеріалу. *Допов. Нац. акад. наук Укр*. 2021. № 4. С. 36—45. https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.036

Надійшло до редакції 05.08.2021

REFERENCES

1. Ortega, J. M. & Rheinboldt, W. C. (1970). Iterative Solution if Nonlinear Equations in Several Variables. New York; London: Academic Press.
2. Il'yushin, A. A. (1963). Fundamentals of the General Mathematical Theory of Plasticity. Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR (in Russian).
3. Birger, I. A. (1951). Some general methods for solving problems of the theory of plasticity. Prikl. Matem. Mekh., 15, No. 6, pp. 765-770 (in Russian).
4. Temis, Yu. M. (1982). Convergence of the method of variable elastic parameters for numerical solution of problems of plasticity by the finite element method, in: Applied Problems of Strength and Plasticity: Statics and Dynamics of Deformable Systems, Moscow, pp. 21-34 (in Russian).
5. Umanskii, S. E. (1983). Optimization of approximate methods for solving boundary value problems in mechanics. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
6. Chirkov, A. Yu. (2005). Iteration algorithms for solving boundary-value problems of the theory of small elastic-plastic strains on the basis of the mixed finite element method. Strength Mater. 37, pp. 310-322. https://doi.org/10.1007/s11223-005-0044-8
7. Chirkov, O. Yu. (2021). The Correctness of the Radiation Creep Equations that Take into Account Stress and Accumulated Irreversible Deformation in the Radiation Model Swelling of the Irradiated Material. Dopov. Nac. akad. nauk Ukr., 2021, No. 4, pp. 36-45 (in Ukrainian) https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.04.036

Received 05.08.2021

O. Yu. Chirkov, https://orcid.org/0000-0003-1916-0277

Pisarenko Institute of Problems of Strength of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: chirkale82@gmail.com

CONVERGENCE OF THE ONE-STEP ITERATION PROCESS IN THE TASKS OF INELASTIC DEFORMATION MECHANICS CONSIDERING THE LOADING HISTORY

The paper presents the one-step iteration process of the solution to nonlinear boundary tasks of inelastic deformation mechanics considering the loading history. Under such circumstances, the stress-strain state depends on the loading history. The process of deformation should be observed within the entire investigated time interval. The deformation process consists of several calculation stages. At each stage, the boundary task is presented in the form of a nonlinear operator equation in the Hilbert plane. The initial strains in the equation are the temperature, structural, and accumulated irreversible ones at the beginning of the loading stage. The irreversible strains depend on the deformation process and are determined considering the loading history. The analysis of convergence between the iteration methods of the solution to the nonlinear boundary tasks, which consider the deformation history of loading, involves the repeatability of the successive approximations for the current loading stage. The known assessments of the convergence of the elastic solution methods and variable elasticity parameters do not consider the error in the calculation of initial strains, which do not depend on the inelastic deformation history. They are determined using the approximated solution to the boundary tasks at the preliminary stages of the loading by iteration methods. In practice, at each loading stage, the approximate equation is solved instead of the output boundary task. The solution to the approximate equation involves the error in the calculation of irreversible strains from the calculation results at the preliminary loading stages. Therefore, the a priori estimates of the convergence between the elastic solution methods and variable elasticity parameters define the convergence of the successive approximations for the solution to this approximate equation. This paper describes some aspects of the convergence analysis of the one-step iteration process, as well as the assessment of the repeatability of the successive approximations considering the loading history.

Keywords: inelastic deformation, boundary-value problem, irreversible strains, iteration process, convergence and accuracy of the successive approximations.