

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.037>

УДК 539.3

**Е.Л. Гарт**, <https://orcid.org/0000-0002-6075-2269>

**Б.І. Терьохін**, <https://orcid.org/0000-0003-2381-8190>

Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара, Дніпро

E-mail: hart@ua.fm, bogdan.teryokhin@gmail.com

## Комп'ютерне моделювання впливу кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках

*Представлено членом-кореспондентом НАН України В.С. Гудрамовичем*

*Проведено комп'ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин і тонкостінних циліндричних оболонок з круговим отвором за наявності оточуючого його кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). Досліджено вплив розмірів ФГМ-включення та закону змінення його модуля пружності на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану пластин і оболонок в околі отвору. Отримано поля розподілу інтенсивностей напружень і деформацій пластинчато-оболонкових елементів конструкцій в зонах локальної концентрації напружень. Встановлено, що за використання кільцевого ФГМ-включення з певними механічними властивостями і геометричними параметрами можна зменшити коефіцієнт концентрації напружень і відповідні інтенсивності деформацій в околі отвору більш ніж на 35 %. Закон змінення модуля пружності ФГМ-включення та ширина включення суттєво впливають не тільки на величину концентрації параметрів напружено-деформованого стану пластини та оболонки, а й на характер розподілу напружень по їх поверхнях. Результати проведеної серії широкомасштабних обчислювальних експериментів показують, що використання кільцевого включення із ФГМ дає змогу знизити інтенсивності як напружень, так і деформацій навколо отвору, що відкриває перспективи знаходження раціональних параметрів включень щодо питання максимально можливого зниження локальної концентрації напружень.*

**Ключові слова:** тонка пружна пластина, тонкостінна циліндрична оболонка, круговий отвір, функціонально-градієнтний матеріал, кільцеве включення, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, метод скінченних елементів.

Тонкостінні конструкції, елементами яких є пластини і оболонки, широко застосовуються в різноманітних галузях техніки, зокрема ракетно-космічній, нафтогазовій, енергетиці, будівництві тощо, завдяки поєднанню значної міцності та відносно малої ваги. У більшості випадків пластинчато-оболонкові елементи конструкцій мають отвори, наявність яких, як прави-

---

Цитування: Гарт Е.Л., Терьохін Б.І. Комп'ютерне моделювання впливу кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 2. С. 37–46. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.037>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

ло, призводить до різкого збільшення локальних напружень, які, у свою чергу, впливають на міцність та надійність конструкції у цілому [1, 2]. Питання концентрації напружень навколо отворів в структурно неоднорідних пластинчато-оболонкових елементах тонкостінних конструкцій є важливою проблемою сучасної нової техніки, зокрема, ракетно-космічної галузі. Відсіки з підкріпленими отворами є типовими для конструкцій ракет-носіїв. Дослідження, що полягають у виборі раціональних типів підкріплень, які забезпечують мінімальні коефіцієнти концентрації напружень, є актуальними при проектуванні сучасних ракет-носіїв.

Питанням дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тонкостінних конструкцій з отворами присвячено багато наукових праць. Фундаментальний характер у цьому напрямі мають роботи відомих вітчизняних вчених Г.М. Савіна [3], О.М. Гузя [4] та ін. Наявність підкріплювальних елементів або включень з певними механічними властивостями сприяє зниженню концентрації напружень навколо отворів [5–10].

Застосування функціонально-градієнтних матеріалів (ФГМ) з певними механічними властивостями також дає змогу впливати на НДС тонкостінних конструкцій для зменшення коефіцієнта концентрації напружень (ККН). У дослідженнях застосовують як аналітичні [11–13], так і числові методи [14, 15].

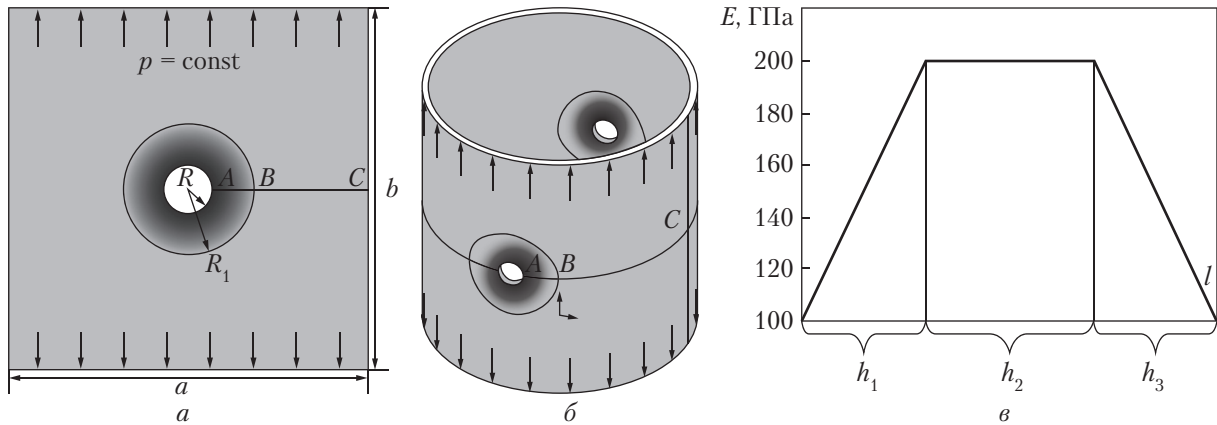
Врахування неоднорідності ФГМ значно підвищує складність математичної моделі задачі та отримання її розв'язку. Аналітичні методи для розв'язування задач про деформування конструкцій із ФГМ можуть бути використані лише в деяких окремих випадках, тому при дослідженні НДС конструкцій з різними неоднорідностями (отворами, включеннями тощо) більш доцільно застосовувати числові методи механіки, які, на відміну від аналітичних, є досить універсальними і ефективними для розв'язування широкого класу задач.

Представлена робота є продовженням циклу робіт авторів з комп'ютерного моделювання поведінки пружних тонких пластин і тонкостінних циліндричних оболонок з круговим отвором за наявності навколо нього кільцевого ФГМ-включення. На основі застосування методу скінченних елементів (МСЕ) здійснюється аналіз впливу розмірів ФГМ-включення та закону змінення його модуля пружності на параметри НДС пластин і оболонок в зонах їх локальної концентрації.

**Постановка задачі.** Розглянуто НДС тонких пружних однорідних ізотропних пластин і циліндричних оболонок з центрально розташованим круговим отвором і кільцевим включенням із ФГМ. Розміри пластин  $a \times b$ , товщина  $h$ , радіус отвору  $R$ , радіус включення  $R_1$  (рис. 1, *a*); довжина оболонок  $L$ , діаметр  $d$ , товщина, радіус отвору та кільцевого ФГМ-включення такі ж як у пластини (рис. 1, *б*). Включення має товщину  $h$  (знаходиться у площині пластини/оболонки), на його границі з матрицею задано умови жорсткого зчеплення. Величина  $R_1$  варіюється. На бокові грані пластин та торці оболонок діє рівномірне одновісне розтягувальне навантаження  $p = \text{const}$ , що не зумовлює появу пластичних деформацій.

У числових розрахунках вибрано модельний матеріал з коефіцієнтом Пуассона  $\nu_0 = 0,25$  та змінним модулем пружності ФГМ-включення:

$$E_1(l) = \begin{cases} E_0 \left(1 + \frac{1}{h_1} l\right), & l \in [0; h_1], \\ 2E_0, & l \in [h_1; h_1 + h_2], \\ E_0 \left(2 - \frac{l - (h_1 + h_2)}{h_3}\right), & l \in [h_1 + h_2; 1], \end{cases} \quad (1)$$



**Рис. 1.** Геометрія та схема навантаження пластини (а) та оболонки (б); закон змінення модуля пружності ФГМ-включення (в)

де  $E_0 = 100$  ГПа – модуль пружності пластини;  $0 \leq l \leq 1$  – нормалізована параметрична відстань в радіальному напрямку від краю отвору (точка А, рис. 1) по ширині включення  $AB = h_{\text{вкл}} = R_1 - R$ ;  $l = (r - R) / (R_1 - R)$ ,  $r$  – відстань від центра отвору до довільної точки включення;  $h_i$  ( $i = 1, 3$ ) – ширина кожної з трьох характерних зон ФГМ-включення,  $h_{\text{вкл}} = \sum_{i=1}^3 h_i$ . Для визначеності вважалося, що пластинка квадратна.

Графічне зображення закону змінення модуля пружності ФГМ-включення (1) наведено на рис. 1, в. Маємо три характерні зони: 1) зона зростання шириною  $h_1$ ; 2) зона незмінного (фіксованого) значення шириною  $h_2$ ; 3) зона зменшення модуля пружності шириною  $h_3$ .

Результати досліджень, проведених у роботі [6] для аналогічної задачі, свідчать, що найбільший вплив на величину ККН має ширина центральної зони ФГМ-включення ( $h_2$ ). З'ясуємо далі, як змінюється ККН для різних варіантів величини  $R_1$  при фіксованих значеннях  $h_1$ ,  $h_3$  та змінній величині  $h_2$  ФГМ-включення (табл. 1).

У разі ФГМ-включення 7 ( $h_{\text{вкл}} = 9R$ ) радіус включення  $R_1$  дорівнює половині ширини пластини. У цьому випадку вважалося, що вся пластинка із ФГМ.

**Таблиця 1.** Варіанти ФГМ-включень в залежності від ширини зон

Вид включення	Ширина зон ФГМ-включення		
	$h_1$	$h_2$	$h_3$
ФГМ-включення 1	$R$	$R$	$R$
ФГМ-включення 2	$R$	$2R$	$R$
ФГМ-включення 3	$R$	$3R$	$R$
ФГМ-включення 4	$R$	$4R$	$R$
ФГМ-включення 5	$R$	$5R$	$R$
ФГМ-включення 6	$R$	$6R$	$R$
ФГМ-включення 7	$R$	$7R$	$R$

**Математичні моделі задач та метод їх розв’язування.** У варіаційній постановці вихідна задача для циліндричної оболонки призводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x, y)h}{(1-\nu_s^2)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\tilde{R}} \right)^2 + 2\nu_s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\tilde{R}} \right) + \frac{1-\nu_s}{2} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x, y)h^3}{12(1-\nu_s^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{\tilde{R}} \right)^2 + 2\nu_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{\tilde{R}} \right) + 2(1-\nu_s) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy, \end{aligned}$$

де  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ ,  $w(x, y)$  – проєкції вектора переміщень на осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно;  $h$  – товщина оболонки;  $\tilde{R}$  – радіус оболонки;  $E_s(x, y)$ ,  $\nu_s$  – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона матеріала оболонки  $\Omega_1$  (матриці) ( $s = 1$ ) і включення  $\Omega_s$  ( $s = 2, n+1$ ,  $n$  – кількість включень);  $\Omega = \bigcup_{s=1}^{n+1} \Omega_s$  – область визначення змінних  $x$  та  $y$ ;  $\gamma$  – границя області  $\Omega$ , вздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності  $P(x, y) = (p_x(x, y), p_y(x, y), p_z(x, y))^T$ . У разі одновісного навантаження розтягування  $p_x(x, y) = p_z(x, y) = 0$ ,  $p_y(x, y) = p = \text{const}$ .

У випадку пластини приходимо до задачі мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії деформації системи такого вигляду:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x, y)h}{(1-\nu_s^2)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1-\nu_s}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v) dx dy. \end{aligned}$$

Поставлені варіаційні задачі розв’язано за допомогою МСЕ з використанням ізопараметричних трикутних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого степеня, при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимовано квадратичним поліномом. В областях концентрації напружень використовували адаптивну сітку (рис. 2) з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10. Збіжність МСЕ у випадку використання плоских скінченних елементів для тонкостінних оболонок тут забезпечується за рахунок згущення сітки. Використання дрібнішої сітки призводить до збільшення точності апроксимації поверхні оболонки геометрією вписаного багатогранника.

**Числовий аналіз.** Обчислювальні експерименти проведені на ПК з процесором Intel Core i7-10700E, тактовою частотою 2,9–4,8 ГГц, оперативною пам’яттю 32 ГВ, розрядністю системи x64. Середня кількість скінченних елементів у разі розрахунку пластин становить 2126, кількість вузлів – 4408; у разі розрахунку оболонок – 6372 та 13002 відповідно.

Числові результати отримані для: 1) квадратних пластин з такими геометричними параметрами:  $h = 0,005$  м,  $a = b = 0,2$  м,  $R = a/20$ ; 2) циліндричних оболонок з параметрами:  $L = d = a$ ,  $h = 0,005$  м,  $R = d/10$ . Навантаження розтягування в обох випадках  $p = 10$  МПа.

Радіус  $R_1$  кільцевого ФГМ-включення навколо отвору варіювався з кроком  $R$ , при цьому ширина ФГМ-включення дорівнювала  $h_{\text{вкл}} = 3R, 4R, \dots, 9R$ .

Результати проведеної серії обчислювальних експериментів за допомогою МСЕ для пластини з ФГМ-включеннями різної ширини зведено у табл. 2, де  $\delta_1$  і  $\delta_2$  – відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій  $\epsilon_i^{\text{max}}$  від відповідного значення для пластини з круговим отвором без включення [3].

Наявність кільцевого ФГМ-включення із заданим законом змінення модуля пружності (1) дозволяє зменшити величини ККН у пластині на  $\sim 21\text{--}38\%$ , а максимальні деформації на  $\sim 25\text{--}40\%$  (див. табл. 2). Аналізуючи результати розрахунків за наявності ФГМ-включень різної ширини (виду 1 – 6), бачимо, що чим більша ширина включення, тим менші значення ККН і деформацій у пластині. Найменше значення ККН із розглянутих варіантів було отримано у випадку ФГМ-включення 6.

На рис. 3, а наведено графіки розподілу відносних напружень  $\sigma_y/p$  у характерному перерізі  $AC$  пластини з ФГМ-включенням для різних варіантів ширини  $h_2$  другої зони ФГМ-включення  $h_2 = 4R; 5R; 6R; 7R$  (див. табл. 1). По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань  $0 \leq l_1 \leq 1$  в радіальному напрямку від краю отвору (див. точка  $A$ , рис. 1, а) по перерізу пластини  $AC = (a - 2R)/2$ :  $l_1 = (r - R) / (\frac{a}{2} - R)$ ,  $r$  – відстань від центра отвору до довільної точки відрізка  $AC$ .

Як видно з рис. 3, а, за використання ФГМ-включень різної ширини відбувається перерозподіл напружень у перерізі  $AC$ , пов'язаний із шириною  $h_2$  центральної зони ФГМ-включення: чим більша величина  $h_2$ , тим менші напруження  $\sigma_y/p$  у перерізі  $AC$ ; при переході від другої до третьої зони для кожного ФГМ-включення 4–7 напруження  $\sigma_y/p$  зменшуються.

Отже, за рахунок завдання певного закону змінення модуля пружності включення можуть впливати на величину ККН і, у цілому, на розподіл напружень в пластині.

Як приклад, на рис. 3, б, в наведено розподіл напружень  $\sigma_y$  в пластині з круговим отвором і ФГМ-включенням 6 ( $h_1 = h_3 = R$ ,  $h_2 = 6R$ ).

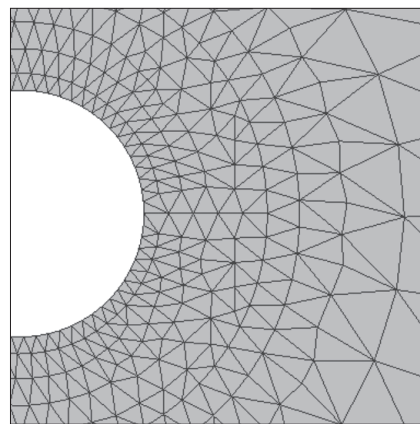
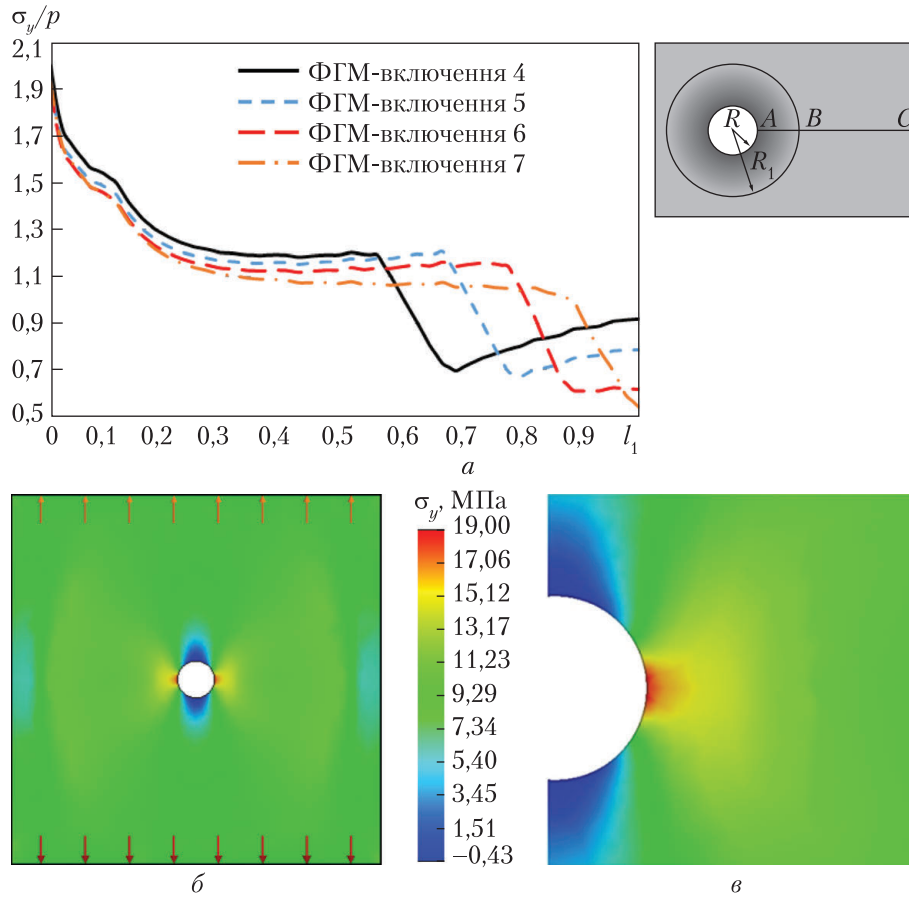


Рис. 2. Фрагмент адаптивної скінченноелементної сітки

Таблиця 2. Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в пластині з ФГМ-включенням

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\epsilon_i^{\text{max}} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1	2,39	-21,6	1,60	-24,9
ФГМ-включення 2	2,23	-26,9	1,50	-29,6
ФГМ-включення 3	2,10	-31,1	1,41	-33,8
ФГМ-включення 4	1,99	-34,8	1,34	-37,1
ФГМ-включення 5	1,93	-36,7	1,30	-39,0
ФГМ-включення 6	1,90	-37,7	1,28	-39,9
ФГМ-включення 7	1,93	-36,7	1,30	-39,0



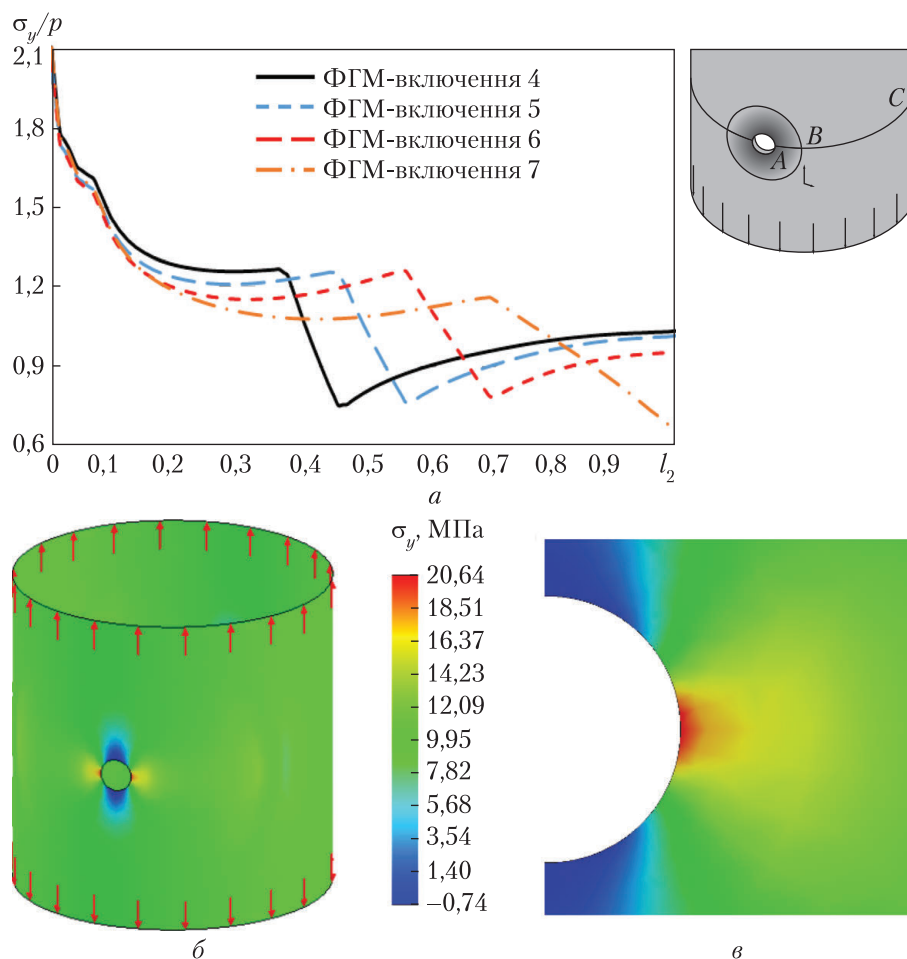
**Рис. 3.** Розподіл відносних напружень  $\sigma_y/p$  в пластині з ФГМ-включенням в перерізі AC при  $h_2 = 4R; 5R; 6R; 7R$  (a); розподіл напружень  $\sigma_y$  в пластині з ФГМ-включенням 6 (б); фрагмент розподілу  $\sigma_y$  навколо отвору (в)

**Таблиця 3.** Коефіцієнт концентрації напружень та відповідні деформації в циліндричній оболонці з ФГМ-включенням

Задача	ККН	$\delta_1, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1	2,49	-23,9	1,66	-27,2
ФГМ-включення 2	2,32	-29,1	1,55	-32,0
ФГМ-включення 3	2,20	-32,7	1,46	-36,0
ФГМ-включення 4	2,11	-35,5	1,41	-38,2
ФГМ-включення 5	2,07	-36,7	1,39	-39,0
ФГМ-включення 6	2,06	-37,0	1,38	-39,5
ФГМ-включення 7	2,11	-35,5	1,41	-38,2

*Примітка:*  $\delta_1$  і  $\delta_2$  — відхилення ККН і максимального значення інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i^{\max}$  від відповідного значення для тонкостінної циліндричної оболонки з круговим отвором без включення [4].





**Рис. 4.** Розподіл відносних напружень  $\sigma_y/p$  в оболонці з ФГМ-включенням у перерізі AC у разі  $h_2 = 4R; 5R; 6R; 7R$  (a); розподіл напружень  $\sigma_y$  в оболонці з ФГМ-включенням 6 (б); фрагмент розподілу  $\sigma_y$  навколо отвору (в)

Далі розглянемо вплив на величину ККН наявності ФГМ-включень навколо кругового отвору в тонкостінній циліндричній оболонці.

Результати здійснених розрахунків для оболонки з ФГМ-включеннями різної ширини (див. табл. 1) із заданим законом змінення модуля пружності (1) наведено у табл. 3.

Із табл. 3 видно, що наявність кільцевого включення із заданим законом змінення модуля пружності зумовлює зменшення величини ККН в оболонці на  $\sim 24\text{--}37\%$ , а максимальних деформацій на  $\sim 27\text{--}39\%$ . Як і у випадку з пластинами, найкращим із розглянутих варіантів для оболонки з точки зору зменшення ККН виявилось ФГМ-включення 6.

Розподіл відносних напружень  $\sigma_y/p$  по поверхні оболонки (у перерізі AC) для ФГМ-включень різної ширини ілюструє рис. 4, a. Як видно з рисунку, картина розподілу є аналогічною випадку для пластин. По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань  $0 \leq l_2 \leq 1$  від краю отвору (точка A, рис. 1, б) по дузі  $AC = (\pi d - 4R)/4$ .

На рис. 4, б, в проілюстровано розподіл напружень  $\sigma_y$  в циліндричній оболонці з круговим отвором і ФГМ-включенням 6 ( $h_1 = h_3 = R$ ,  $h_2 = 6R$ ) навколо нього.

**Висновки.** На основі проведеної серії широкомасштабних обчислювальних експериментів із застосуванням МСЕ здійснено моделювання та аналіз впливу кільцевого ФГМ-включення на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках. Результати комп'ютерного моделювання і числового дослідження впливу геометричних характеристик ФГМ-включення та закону змінення його модуля пружності за радіальним напрямком на концентрацію параметрів НДС навколо отвору пластинчато-оболонкових елементів конструкцій показали, що за наявності ФГМ-включень з певними механічними властивостями і геометричними характеристиками можна зменшити ККН і відповідну інтенсивність деформацій в околі отвору більш ніж на 35 %.

Отже, використання кільцевих підкріплень кругових отворів у вигляді ФГМ-включень у пластинах та циліндричних оболонках з отворами є доцільним. Воно дає змогу впливати не тільки на характер розподілу, але і на інтенсивності напружень і деформацій в зонах локальної концентрації їх параметрів НДС.

Перспективним є пошук раціональних параметрів ФГМ-включень, знаходження їх видів і конфігурацій з точки зору впливу на зменшення концентрації параметрів НДС пластин і оболонок із різними отворами.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Авдонин А.С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. Москва: Наука, 1969. 402 с.
2. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Москва: Мир, 1977. 302 с.
3. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
4. Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. Н. и др. Методы расчета оболочек. В 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. Киев: Наук. думка, 1980. 636 с.
5. Гарт Е.Л., Терьохін Б.І. Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами. *Пробл. обчисл. механ. і міцн. конструкцій*: зб. наук. праць. Дніпро: Ліра, 2019. Вип. 30. С. 19–32. <https://doi.org/10.15421/4219024>
6. Гарт Е.Л., Гудрамович В.С., Терьохін Б.І. Вплив включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень в тонких пластинах та циліндричних оболонках з круговим отвором. *Техн. механіка*. 2022. № 4. С. 67–78. [http://journal-itm.dp.ua/ENG/Publishing/06-04-2022\\_eng.html](http://journal-itm.dp.ua/ENG/Publishing/06-04-2022_eng.html)
7. Hart E.L., Hudramovich V.S. Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength Mater. and Theor. Struct.: Sci. and Techn. col. art.* Kyiv: KNUBA, 2022. Iss. 108. P. 77–86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>
8. Hart E.L., Terokhin B.I. Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *J. Optimization, Differential Equations and their Applications*. 2021. **29**, Iss. 1. P. 42–53. <https://doi.org/10.15421/142103>
9. Gudramovich V.S., Gart E.L., Strunin K.A. Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions. *Mater. Sci.* 2017. **52**, Iss. 6. P. 768–774. <https://doi.org/10.1007/s11003-017-0020-z>
10. Hudramovich V.S., Hart E.L., Marchenko O.A. Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure. *Strength Mater.* 2020. **52**, No. 6. P. 832–842. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7>
11. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. С.М. Айзикович [и др.]. Москва: Физматлит, 2011. 192 с. ISBN 978-5-9221-1299-4.



12. Yang Q.Q., Gao C.F., Chen W.T. Stress concentration in a finite functionally graded material plate. *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 2012. **55**. P. 1263–1271. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>
13. Linkov A., Rybarska-Rusinek L. Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges. *Intern. J. Engng Sci.* 2012. **61**. P. 87–93. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.06.012>
14. Kubair D.V., Bhanu-Chandar B. Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension. *Intern. J. Mech. Sci.* 2008. **50**, Iss. 4. P. 732–742. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009>
15. Mohammadi M., Dryden J.R., Jiang L. Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. *Intern. J. Solids Structures.* 2011. **48**, Iss. 3–4. P. 483–491. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013>

Надійшло до редакції 27.12.2022

## REFERENCES

1. Avdonin, A. S. (1969). Applied methods for calculating shells and thin-walled structures. Moscow: Nauka (in Russian).
2. Peterson, R. (1977). Stress concentration factors. Moscow: Mir (in Russian).
3. Savin, G. N. (1968). Stress distribution around holes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
4. Guz, A. N., Chernyshenko, I. S. & Chekhov, Val. N. et al. (1980). Methods for calculating shells. In 5 vols. Vol. 1. Theory of thin shells, weakened by holes. Kyiv: Naukova Dumka (in Russian).
5. Hart, E. L. & Terokhin, B. I. (2019). Choice of rational parameters of reinforcement elements in computer simulation of behavior of a cylindrical shell with two rectangular holes. *Probl. Comput. Mechan. and Strength Struct.: Col. of sci. art.* Dnipro: Lira, 30, pp. 19-32 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15421/4219024>
6. Hart, E. L., Hudramovich, V. S. & Terokhin, B. I. (2022). Effect of a functionally graded material inclusion on the stress concentration in thin plates and cylindrical shells with a circular opening. *Techn. Mechan.*, No. 4, pp. 67-78 (in Ukrainian). [http://journal-itm.dp.ua/ENG/Publishing/06-04-2022\\_eng.html](http://journal-itm.dp.ua/ENG/Publishing/06-04-2022_eng.html)
7. Hart, E. L. & Hudramovich, V. S. (2022). Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations. *Strength Mater. and Theor. Struct.: Sci. and Techn. col. art.* Kyiv: KNUBA, Iss. 108, pp. 77-86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>
8. Hart, E. L. & Terokhin, B. I. (2021). Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion. *J. Optimization, Differential Equations and their Applications*, 29, Iss. 1, pp. 42-53. <https://doi.org/10.15421/142103>
9. Gudramovich, V. S., Gart, É. L. & Strunin, K. A. (2017). Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions. *Mater. Sci.*, **52**, Iss. 6, pp. 768-774. <https://doi.org/10.1007/s11003-017-0020-z>
10. Hudramovich, V. S., Hart, E. L. & Marchenko, O. A. (2020). Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure. *Strength Mater.*, 52, No. 6, pp. 832–842. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7>
11. Aizikovich, S. M. [et al.] (2011). Analytical solutions of mixed axisymmetric problems for functionally graded media. Moscow: FIZMATLIT (in Russian). ISBN 978-5-9221-1299-4.
12. Yang, Q. Q., Gao, C. F. & Chen, W. T. (2012). Stress concentration in a finite functionally graded material plate. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, 55, pp. 1263-1271. <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>
13. Linkov, A. & Rybarska-Rusinek, L. (2012). Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges. *Intern. J. Engng Sci.*, 61, pp. 87-93. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.06.012>
14. Kubair, D. V. & Bhanu-Chandar, B. (2008). Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension. *Intern. J. Mech. Sci.*, 50, Iss. 4, pp. 732-742. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009>
15. Mohammadi, M., Dryden, J. R. & Jiang, L. (2011). Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. *Intern. J. Solids Structures*, 48, Iss. 3-4, pp. 483-491. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013>

Received 27.12.2022

*E.L. Hart*, <https://orcid.org/0000-0002-6075-2269>

*B.I. Teryokhin*, <https://orcid.org/0000-0003-2381-8190>

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro

E-mail: [hart@ua.fm](mailto:hart@ua.fm), [bogdan.teryokhin@gmail.com](mailto:bogdan.teryokhin@gmail.com)

COMPUTER SIMULATION OF THE EFFECT OF AN ANNULAR INCLUSION  
FROM A FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL ON THE STRESS CONCENTRATION  
AROUND A CIRCULAR HOLE IN THIN PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS

Computer modelling and FEM analysis of the stress-strain state of thin plates and thin-walled cylindrical shells with a circular hole in the presence of a surrounding ring inclusion of a functionally graded material (FGM) is carried out. The influence of the dimensions of the FGM inclusion and the law of change of its elastic modulus on the concentration of the parameters of the stress-strain state of plates and shells in the vicinity of the hole is studied. The distribution fields of stress and strain intensities of plate-shell structural elements in the zones of local stress concentration are obtained. It has been established that when using an annular FGM inclusion with specific mechanical properties and geometric parameters, it is possible to reduce the stress concentration factor and the corresponding strain intensities in the vicinity of the hole by more than 35%. The law of change in the modulus of elasticity of the FGM inclusion and the width of the inclusion has a significant effect not only on the concentration of the parameters of the stress-strain state of the plate and shell but also on the nature of the stress distribution over their surfaces. The results of a series of large-scale computational experiments show that the use of an annular inclusion made of FGM makes it possible to reduce the intensity of both stresses and deformations around the hole, which opens up prospects for finding rational parameters of inclusions from the point of view of the maximum possible reduction in local stress concentration.

**Keywords:** *thin elastic plate, thin-walled cylindrical shell, circular hole, functionally graded material, annular inclusion, stress-strain state, stress concentration factor, finite element method.*