

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.04.026>

УДК 539.421

**М.Ф. Селіванов**, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

**П.В. Фернаті**, <https://orcid.org/0000-0002-5521-2225>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ

E-mail: mfs@ukr.net, pavel147223@gmail.com

## Ініціація і повільне поширення тріщини вздовж площини симетрії просторової в'язкопружної трансверсально ізотропної пластини

*Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком*

*Досліджується ініціювання та квазістатичне поширення наскрізної крайової тріщини нормального відриву в тривимірній пластині внаслідок спадкових властивостей матеріалу. Для моделювання розвитку тріщини використано підхід інкременталізації конститутивних рівнянь та критерій критичного розкриття. Для площини симетрії пластини застосовано алгоритм, апробований для розв'язання відповідної плоскої задачі. Час інкубації обчислено послідовним визначенням часу досягнення розкриттям у вершині на площині симетрії частки критичного розкриття. Проілюстровано зміну розкриття з часом у площині симетрії та зовнішній площині пластини.*

**Ключові слова:** просторове в'язкопружне ортотропне тіло, інкрементне в'язкопружне формулювання, метод скінченних елементів, відтерміноване руйнування, повільне зростання тріщини.

**Постановка задачі.** Прикладене до твердого тіла навантаження, яке є меншим за критичне, не означає, що це тіло захищене від катастрофічного руйнування. Докритичне напруження може призвести до раптового та непередбачуваного руйнування матеріалу після певної затримки часу, протягом якої не спостерігається передвісників неминучого руйнування. В'язкопружні матеріали, такі як асфальт, бетон, полімери і композити на їх основі широко застосовуються в інженерній практиці. Руйнування цих матеріалів за наявності концентраторів напруження може відбутися через деякий час після прикладання навантаження, яке без врахування спадкових властивостей матеріалу вважається безпечним — відбувається так зване відтерміноване руйнування. Залежно від співвідношення прикладеного навантаження до критичного значення, за якого тріщина зароджується миттєво, час

Ц и т у в а н н я: Селіванов М.Ф., Фернаті П.В. Ініціація і повільне поширення тріщини вздовж площини симетрії просторової в'язкопружної трансверсально ізотропної пластини. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 4. С. 26—32. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.04.026>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2023. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

затримки між прикладанням навантаження і руйнуванням може варіюватися від секунд до годин, днів або навіть років. З цієї причини вивчення задач в'язкопружного руйнування має особливе значення.

Дослідження в галузі довготривалого руйнування розпочались у 60-х роках минулого сторіччя, а сучасне уявлення про моделювання склалося на початку 80-х років. В основу теорій покладено модель когезійної зони, яка усуває нескінченні напруження в вершині тріщини, що дозволяє застосовувати лінійну теорію пружності. Порівняння основних теорій поширення тріщин проведено в [1], де також висвітлено розвиток цього напрямку досліджень.

При використанні когезійних зон для моделювання зародження тріщини часто виникають труднощі збіжності в точці, де тріщина зароджується. Відомо, що ці проблеми пов'язані з пружною поновлювальною нестабільністю (elastic snap-back instability), яка з'являється відразу після того, як напруження досягає міцності зчеплення. Для вирішення цих проблем збіжності можна використовувати різні підходи: наприклад, можна задати величину розкриття у вершині тріщини, залишаючи інтенсивність зовнішнього навантаження змінною величиною; альтернативно для відстеження нестабільної гілки розв'язку можуть бути використані схеми загального призначення, такі як метод Рікса [2] та його модифікація [3], або підхід введення малої в'язкості в конститутивні рівняння [4].

В даній роботі на основі результатів [5], отриманих для плоскої задачі, побудовано приклад розв'язання відповідної задачі про ініціювання та поширення тріщини вздовж площини симетрії механічних властивостей ( $x_3 = 0$ ) просторової в'язкопружної трансверсально ізотропної пластини (рис. 1). Моделювання проведено за допомогою критерію критичного розкриття тріщини та трапеціодального закону зчеплення–відриву, який вважається незмінним в кожний момент часу ініціації та квазістатичного поширення тріщини. Моделювання спадкових властивостей проведено за допомогою інкременталізації конститутивних співвідношень Больцмана–Вольтерра [5].

**Розв'язання задачі.** В [5] побудовано алгоритм дослідження ініціації та поширення наявної тріщини у в'язкопружному ортотропному тілі в умовах плоского напруженого стану. Розв'язання задачі розділено на декілька етапів. Для малих значень розкриття в вершині тріщини у момент прикладання навантаження напружений стан визначено шляхом розв'язання задачі 1, яка полягає у задоволенні закону зчеплення—відриву для заданого рівня зовнішнього навантаження.

Задачу 2 можна розділити на дві частини.

1. Дослідження інкубації тріщини (задача 2а). Для заданого приросту розкриття  $\Delta_{\text{inc}} = \Delta_n - \Delta_{n-1}$  ( $\Delta_n$  відповідає моменту часу  $t_n$ ) в вершині тріщини знайти відповідний приріст часу  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ .

2. Дослідження поширення тріщини (задача 2б). Для критичного розкриття в вершині тріщини та заданого приросту її довжини  $\lambda_{\text{inc}} = \lambda_n - \lambda_{n-1}$  ( $\lambda_n$  відповідає моменту часу  $t_n$ ) знайти відповідний приріст часу  $\Delta t_n$ .

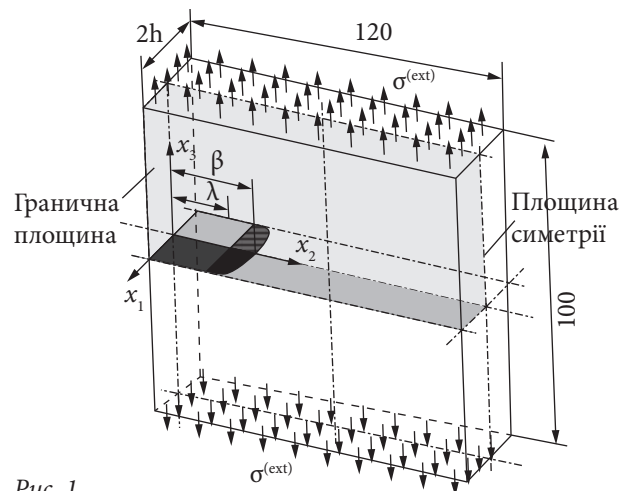


Рис. 1

Алгоритм об'єднує задачі 2а і 2б шляхом введення функції  $\Sigma(\Delta t_n, \Delta_n, \lambda_n)$ , яка визначає напруження, що необхідно прикласти до тіла щоб через час  $\Delta t_n$  розкриття у вершині тріщини було рівне  $\Delta_n$ , а довжина —  $\lambda_n$ . Під час інкубації  $\Delta_n < \Delta_{\max}$  і  $\lambda_n = \lambda_0$  ( $\lambda_0$  — початкова довжина тріщини), під час поширення —  $\Delta_n = \Delta_{\max}$  і  $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ .

Кожне значення функції  $\Sigma$  отримується розв'язанням задачі 3. Ця задача полягає у задоволенні закону зчеплення—відриву разом із граничною умовою для розкриття у вершині тріщини:

$$2(\mathbf{U}_p^{n-1} + \Delta \mathbf{U}_p^n) = \Delta_n,$$

де  $\mathbf{U}^{n-1}$  — вектор переміщень у вузлах сітки для попереднього моменту часу;  $\Delta \mathbf{U}^n$  — приріст переміщень на інтервалі часу  $\Delta t_n$ ; індекс  $p$  відповідає вертикальному переміщенню вузла сітки, що збігається з вершиною тріщини  $\lambda_n$ . Таким чином, знаходження розв'язку задачі 3 зводиться до послідовного розв'язання рівнянь

$$\Sigma(\Delta t_n, \Delta_n, \lambda_n) = \sigma^{(\text{ext})}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

відносно невідомого приросту часу.

Цей алгоритм можна перенести на випадок просторової задачі шляхом розв'язання рівняння (1) для площини симетрії.

**Числовий приклад.** Релаксацію в'язкопружного ортотропного матеріалу пластини опишемо однією експоненціальною функцією:

$$E_{33}(t) = E_{33}^\infty + E_{33}^1 \exp\{-t / \rho\}, \quad E_{22}(t) = E_{22}^\infty + E_{22}^1 \exp\{-t / \rho\},$$

$$G_{23}(t) = G_{23}^\infty + G_{23}^1 \exp\{-t / \rho\}, \quad v_{21} = \text{const}, \quad v_{32} = \text{const}.$$

Елементи відповідної в'язкопружної матриці жорсткості вписано в [6].

Числові розв'язки отримано для наступних значень вихідних параметрів задачі:  $E_{33}^0 = E_{33}^\infty + E_{33}^1 = 24$  ГПа,  $E_{33}^\infty = 6$  ГПа,  $E_{22}^0 = E_{22}^\infty + E_{22}^1 = 8$  ГПа,  $E_{22}^\infty = 1$  ГПа,  $G_{23}^0 = G_{23}^\infty + G_{23}^1 = 3$  ГПа,  $G_{23}^\infty = 0,4$  ГПа,  $v_{21} = v_{32} = 0,3$ ,  $\rho = 20$  с.

Визначення сил когезії проведемо для згладженого трапеціодального закону зчеплення—відриву

$$T(\bar{\Delta}) = \sigma_{\max} \begin{cases} a_1^{-1} \bar{\Delta} (2 - a_1^{-1} \bar{\Delta}), & \bar{\Delta} \in [0, a_1], \\ 1, & \bar{\Delta} \in [a_1, a_2], \\ (1 - \bar{\Delta})^2 (1 + 2\bar{\Delta} - 3a_2)(1 - a_2)^{-3}, & \bar{\Delta} \in (a_2, 1], \end{cases}$$

де  $\sigma_{\max}$  — міцність зчеплення;  $\bar{\Delta} = \Delta / \Delta_{\max}$  — відносний відрив. Після введення сталої  $\omega = \int_0^1 T(\bar{\Delta}) d\bar{\Delta} = \frac{1}{6} (3 - 2a_1 + 3a_2)$  можна визначити внутрішній параметр моделі  $\Delta_{\max} = \phi / (\omega \sigma_{\max})$  ( $\phi$  — енергія руйнування), яку було обрано критеріальною величиною. Оберемо наступні параметри закону:  $\phi = 150$  Н/м,  $\sigma_{\max} = 5$  МПа,  $a_1 = 0,002$ ,  $a_2 = 0,9$ . Початкова довжина тріщини  $\lambda_0 = 1,5$  см, інтенсивність зовнішнього навантаження

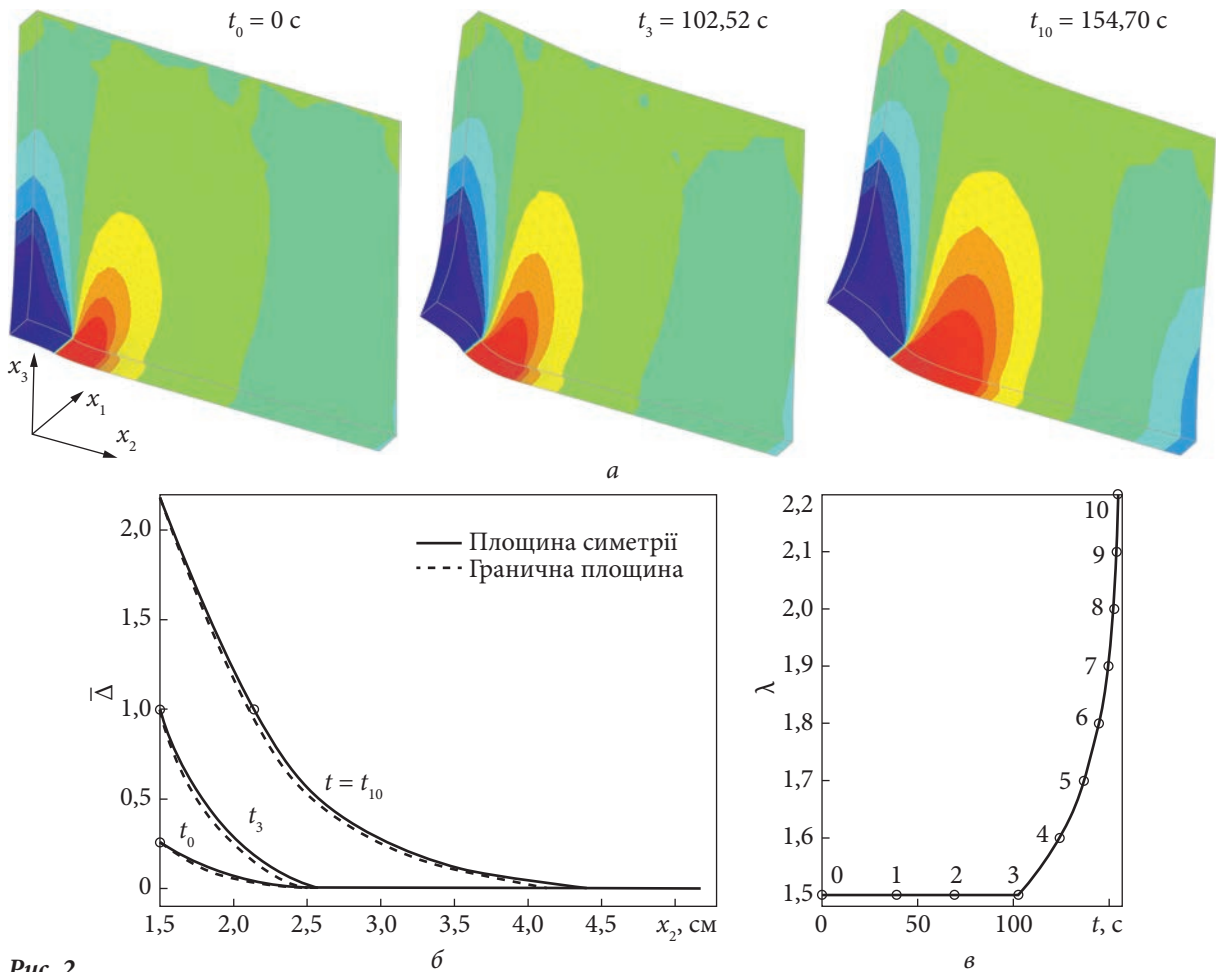


Рис. 2

$\sigma^{(ext)} = 0,5\sigma_{max}$ . Зважаючи на симетрію розрахунки проведено для чверті пластини за вказаними на рис. 1 розмірами.

На рис. 2, а проілюстровано поле напруження  $\sigma_{33}$  для деформованої чверті пластини (з фактором 300), що відповідають трьом моментам часу: початковому, завершенню ініціації та квазістатичного зростання тріщини. На рис. 2, б наведені розкриття для трьох вказаних моментів часу, на рис. 2, в — залежність довжини тріщини від часу.

Рис. 3 ілюструє поле відносного розкриття  $\bar{\Delta}$  площин берегів тріщини в зоні зчеплення, побудоване на деформованій площині  $\{x_3 = 0, x_2 > \lambda_0\}$  поза початковою тріщиною. Оскільки елементи прикладання сил зчеплення обрано на площині продовження тріщини до границі тіла, величина  $\bar{\Delta} = a_1$  визначатиме грани-

| $n$ | ПНС    | $h = 0,5$ см | $h = 1$ см |
|-----|--------|--------------|------------|
| 0   | 0      | 0            | 0          |
| 1   | 39,14  | 39,04        | 38,76      |
| 2   | 69,79  | 69,63        | 69,18      |
| 3   | 103,36 | 103,11       | 102,52     |
| 4   | 125,37 | 124,95       | 124,16     |
| 5   | 138,29 | 137,51       | 136,58     |
| 6   | 146,45 | 145,93       | 144,63     |
| 7   | 151,62 | 150,74       | 149,70     |
| 8   | 154,69 | 153,84       | 152,79     |
| 9   | 156,18 | 155,38       | 154,34     |
| 10  | 156,48 | 155,72       | 154,70     |

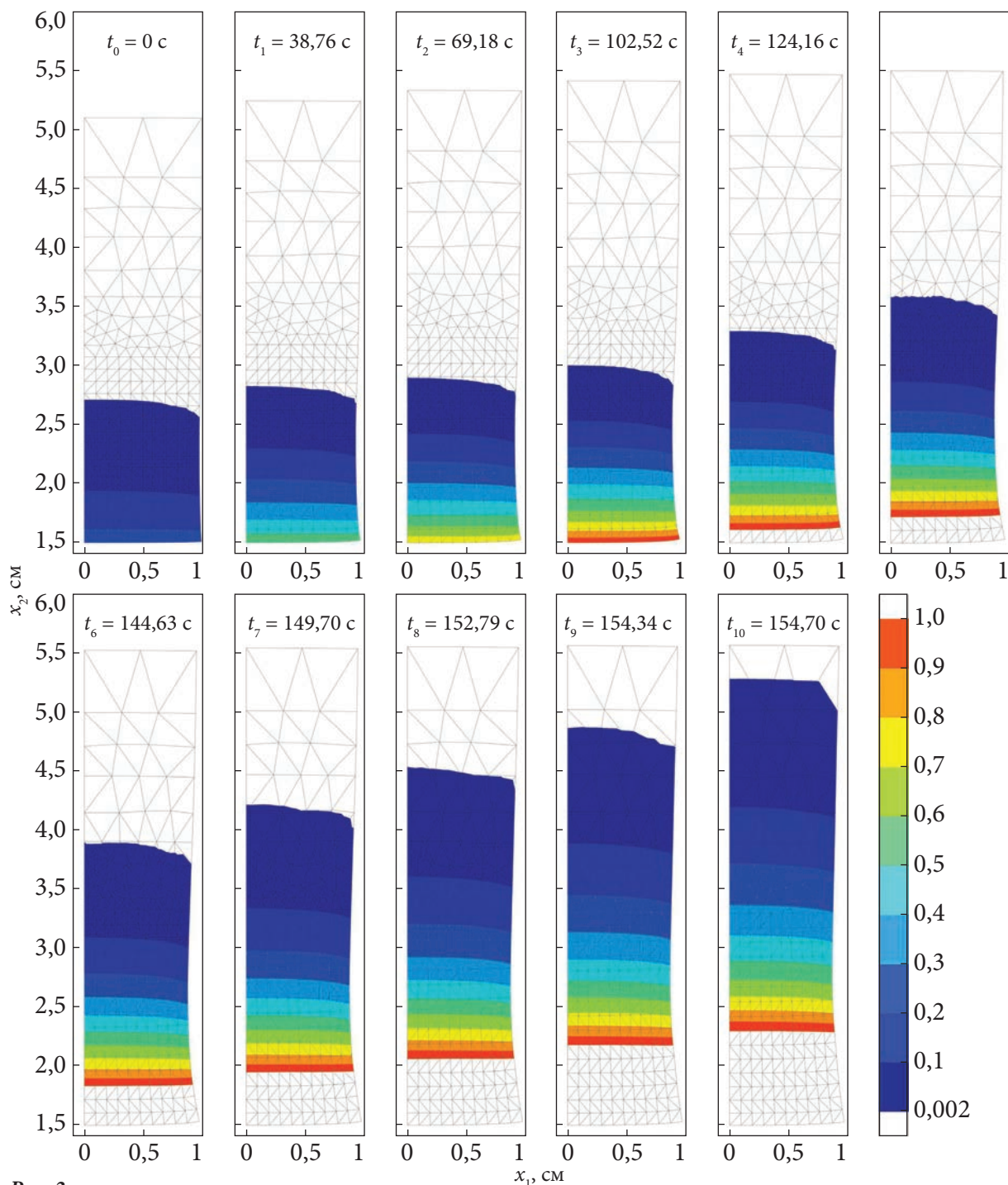


Рис. 3

цю зони зчеплення. Як під час ініціації, так і під час поширення тріщини спостерігається збільшення розмірів когезійної зони.

Проведено порівняння результатів, отриманих для плоского напруженого стану (ПНС) в [5], та двох товщин пластини. В таблиці наведені моменти часу  $t_n$ , які відповіда-

ють обраним положенням розкриття у вершині початкової тріщини під час інкубаційного періоду та положенню вершини під час зростання. Спостерігається незначне збільшення довговічності тіла зі збільшенням товщини пластини.

Таким чином, побудований авторами в попередній роботі алгоритм для дослідження ініціювання та поширення тріщини в умовах плоского напруженого стану поширено на випадок просторової задачі. Додаткові критеріальні рівняння перенесені на площину симетрії пластини, яка перпендикулярна площині поширення тріщини. За допомогою такого підходу вдається визначити контур тріщини, що зростає, та границі зони переддруйнування зі зміною часу. В отриманих числових прикладах проілюстровано зростання когезійної довжини як під час поширення тріщини так і під час її інкубаційного періоду.

#### ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Hui C.-Y., Zhu B., Long R. Steady state crack growth in viscoelastic solids: A comparative study. *J. Mech. Phys. Solids*. 2022. **159**. С. 104748. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104748>
2. Ricks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids. Structures*. 1979. **15**, Iss. 7. С. 529—551. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7)
3. Crisfield M.A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Comput. Struct*. 1981. **13**, Iss. 1–3. С. 55—62. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5)
4. Gao Y.F., Bower A.F. A simple technique for avoiding convergence problems in finite element simulations of crack nucleation and growth on cohesive interfaces. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 2004. **12**, № 3. С. 453—463. <https://doi.org/10.1088/0965-0393/12/3/007>
5. Селіванов М.Ф., Фернаті П.В. Моделювання квазістатичного поширення тріщини у в'язкопружному ортотропному середовищі в рамках підходу інкременталізації конститутивних рівнянь. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 2. С. 65—75. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.065>
6. Селіванов М.Ф., Фернаті П.В. Дослідження зміни концентрації напружень у просторовій пластині з в'язкопружного трансверсально ізотропного матеріалу. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2023. № 1. С. 33—39. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.033>

Надійшло до редакції 18.04.2023

#### REFERENCES

1. Hui, C.-Y., Zhu, B. & Long, R. (2022). Steady state crack growth in viscoelastic solids: A comparative study. *J. Mech. Phys. Solids.*, 159, pp. 104748. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104748>
2. Ricks, E. (1979). An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids. Structures*, 15, Iss. 7, pp. 529-551. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7)
3. Crisfield, M. A. (1981). A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *Comput. Struct.*, 13, Iss. 1–3, pp. 55-62. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90108-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90108-5)
4. Gao, Y. F. & Bower, A. F. (2004). A simple technique for avoiding convergence problems in finite element simulations of crack nucleation and growth on cohesive interfaces. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 12, № 3, pp. 453-463. <https://doi.org/10.1088/0965-0393/12/3/007>
5. Selivanov, M. & Fernati, P. (2023). Modeling the quasi-static crack propagation in a viscoelastic orthotropic medium using the incrementalization of constitutive equations. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 2, pp. 65-75 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.065>
6. Selivanov, M. & Fernati, P. (2023). Determining the change of stress concentration with time in a 3-D viscoelastic transverse isotropic plate. *Dopov. Nac. akad. nauk Ukr.*, No. 1, pp. 33-39 (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.01.033>

Received 18.04.2023

M.F. Selivanov, <https://orcid.org/0000-0003-1266-4042>

P.V. Fernati, <https://orcid.org/0000-0002-5521-2225>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv

E-mail: mfs@ukr.net, pavel147223@gmail.com

#### INITIATION AND SLOW PROPAGATION OF A CRACK ALONG THE PLANE OF SYMMETRY OF A 3-D VISCOELASTIC TRANSVERSELY ISOTROPIC PLATE

This paper investigates the initiation and quasi-static propagation of a through mode I edge crack in a three-dimensional plate, considering the hereditary properties of the material. The crack growth is modeled using the incrementalization of constitutive equations and the criterion of critical opening displacement. The algorithm tested for solving the corresponding planar problem is applied to the plane of symmetry of the plate. The incubation time is calculated by successively determining the time it takes for the opening at the crack tip on the plane of symmetry to reach the critical opening fraction. The changes in opening over time are illustrated for both the plane of symmetry and the outer plane of the plate.

**Keywords:** 3-D viscoelastic transversely isotropic solid, incremental viscoelastic formulation, finite element method, delayed fracture, quasi-static crack growth.