

<https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.053>
УДК 539.421

В.Л. Богданов, <https://orcid.org/0000-0001-9864-9120>

Д.М. Селіванов, <https://orcid.org/0000-0001-9927-9985>

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
E-mail: bogdanov@nas.gov.ua, dselivanov29@gmail.com

Дослідження впливу параметрів тріщиностійкості на критичне навантаження зразка з тріщиною нормального відриву при триточковому згині в рамках когезійної моделі

Представлено академіком НАН України В.М. Назаренком

В статті для аналізу процесу руйнування зразка з крайовою тріщиною I типу за умов триточкового згину використано когезійну модель зони передруйнування біля вершини тріщини. При цьому застосовано внутрішню модель з трапецієдальним законом зчеплення–відриву в когезійній зоні. У скінченно-елементному дослідженні контактна взаємодія врахована штрафним методом. Проаналізовано вплив на критичне навантаження параметрів когезійної зони, таких як когезійна міцність і параметри форми. Продемонстровано як зі збільшенням когезійної міцності прогноз щодо критичного навантаження, отриманий в рамках нелінійної механіки руйнування, наближається до прогнозу, отриманого в рамках лінійної механіки руйнування.

Ключові слова: тіло з крайовою тріщиною I типу, когезійна модель, триточковий згин, стан граничної рівноваги.

Вступ. Вивчення процесу поширення тріщини у твердому деформівному тілі передбачає використання адекватної моделі тріщини та критерію руйнування, базуючись на яких та аналізуючи напруження в околі вершини тріщини визначається конфігурація параметрів задачі, що забезпечує подальше просування тріщини. В лінійній (лінійно-

Цитування: Богданов В.Л., Селіванов Д.М. Дослідження впливу параметрів тріщиностійкості на критичне навантаження зразка з тріщиною нормального відриву при триточковому згині в рамках когезійної моделі. *Допов. Нац. акад. наук Укр.* 2024. № 5. С. 53—61. <https://doi.org/10.15407/dopovidi2024.05.053>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

пружній) механіці руйнування існує ряд критеріїв, в рамках яких критичні параметри навантаження, за досягнення яких починається процес руйнування, визначаються із застосуванням енергетичного або силового підходів [1, 2]. Енергетичний підхід передбачає, що руйнування поширюється, коли інтенсивність (швидкість) вивільнення пружної енергії перевищує певну критичну величину; еквівалентний йому силовий підхід враховує, що руйнування відбувається, коли коефіцієнт інтенсивності напруження в околі вершини тріщини перевищує критичне для даного матеріалу значення. Підходи лінійної механіки руйнування призводять до фізично необґрунтованої сингулярності поля напружень поблизу вершини тріщини, проте вони є досить зручним математичним інструментом для отримання аналітичних розв'язків із високою точністю за межами сингулярної області.

Подальшим кроком у розвитку механіки руйнування стала розробка когезійних моделей, які усувають вказану вище сингулярність напружень в околі вершини тріщини. Модель когезійної зони — це ідеалізоване наближення локалізованої в околі вершини тріщини зони передруйнування, прийняте зі збереженням найбільш важливих аспектів фізичної реальності з метою математичної простоти. Суть когезійної моделі полягає в описі нелінійності за допомогою зв'язку між силами когезії та розкриттям тріщини біля її вершини, і істотною перевагою цієї моделі є те, що за адекватно встановленого зв'язку (закону зчеплення–відриву) її можна використовувати для опису широкого класу задач механіки руйнування. Нелінійні ефекти в околі вершини тріщини «зносяться» на відрізок фіктивної тріщини, розташований на продовженні лінії фізичної тріщини. Довжину цього відрізка називають когезійною довжиною. В загальному випадку вона визначається умовою плавності змикання берегів тріщини і заздалегідь невідома. Найпростішим законом зчеплення–відриву є рівномірний закон, який відповідає моделі Леонова—Панасюка—Дагдейла, і у випадку центральної тріщини у нескінченному плоскому тілі ця модель дозволяє отримати аналітичний вираз для когезійної довжини. Втім, це чи не єдиний випадок існування аналітичного розв'язання задачі в рамках когезійної моделі. Ціною введення фізично обґрунтованого співвідношення між когезійними силами та розкриттям тріщини стає нелінійність рівнянь, що дають розв'язок задачі. Завдячуючи тому, що зазвичай закон зчеплення–відриву має просту аналітичну форму (куськово-лінійну, поліноміальну, експоненціальну), ці рівняння легко лінеаризуються і розв'язок задачі знаходиться ітеративним методом, на кожному кроці якого розв'язується система лінійних рівнянь.

Параметри когезійного закону можна отримати за допомогою лабораторних експериментів, таких як «бразильський тест» або тест на напівкруглий згин. Наприклад, в [3] представлена методологія для визначення когезійних властивостей гірської породи на основі випробувань на півкруглий згин.

На основі отриманих характеристик тріщиностійкості можливе дослідження як зародження тріщини, так і докритичного стану тіла з тріщиною та стану його граничної рівноваги. Важливим є розуміння впливу основних параметрів тріщиностійкості на рівень критичного навантаження. В [4] побудовано числові розв'язки в рамках моделі когезійної зони для обчислення розміру зони передруйнування для крайової тріщини в скінченних квадратних пластинах різної довжини, що охоплює кілька порядків, та здійснено порівняння цих розв'язків з наявним аналітичним розв'язком. В [5] спочатку досліджується

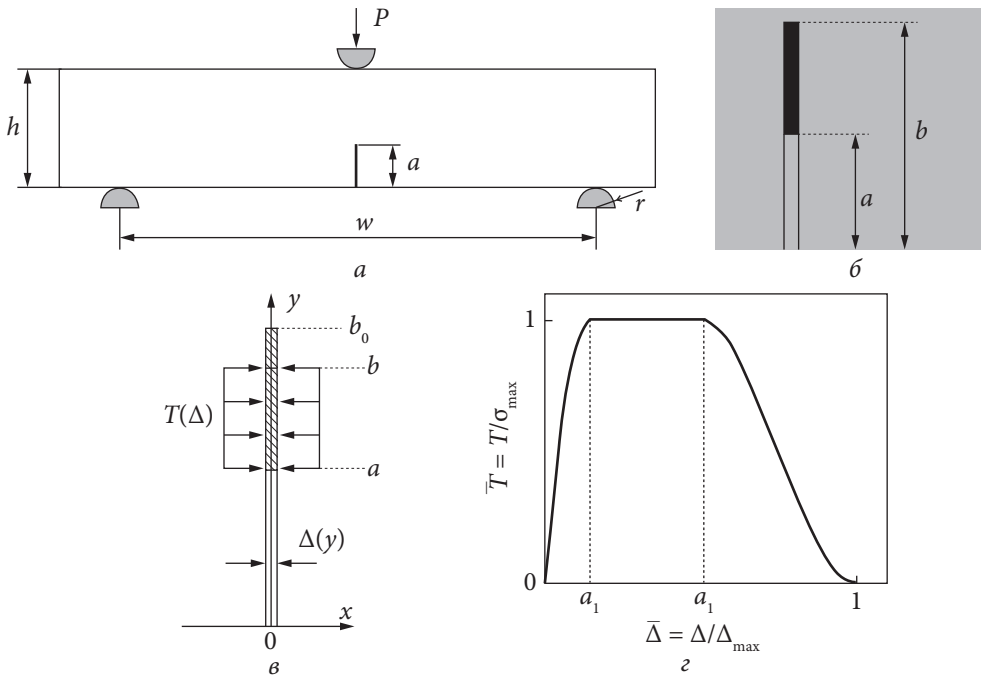


Рис. 1. Зразок з тріщиною за умов триточкового згину (а), геометрія фізичної та фіктивної тріщини (б), модель когезійної зони (в) та закон зчеплення-відриву (г)

чутливість параметрів когезійної зони (міцності зчеплення та енергії руйнування) у прогнозуванні деформування подвійної консольної балки, а згодом когезійні параметри налаштовуються шляхом порівняння числового моделювання кривої навантаження–переміщення з експериментальними результатами, отриманими з літератури. В [6] аналізується поширення когезійної тріщини через армуючий шар і дається розв’язок для армованої призматичної балки, навантаженої в трьох точках. При огляді літератури авторами не виявлено робіт з визначення граничних рівнів навантаження та дослідження впливу на них параметрів когезійного закону.

Мета даної роботи — разом із побудовою вказаних залежностей окреслення межі застосування лінійно пружної механіки руйнування при визначенні рівнів граничних навантажень.

На прикладі прямокутного зразка з крайовою тріщиною в умовах триточкового згину (рис. 1, а) методом скінченних елементів отримано залежності критичного навантаження, що відповідає досягненню розкриття тріщини величини Δ_{\max} , від параметрів когезійного закону. Використовується внутрішній трапецоїдальний когезійний закон на відрізку (a, b_0) , який є напевно більшим за когезійну довжину $b - a$ (рис. 1, б, в); цей закон (рис. 1, г) характеризується двома основними параметрами тріщиностійкості — енергією руйнування ϕ і міцністю зчеплення σ_{\max} , а також параметрами форми — a_1 (довжина ділянки зміцнення) і a_2 (початок ділянки розміцнення). Ці параметри пов’язані з критичним розкриттям тріщини Δ_{\max} , яке є внутрішнім параметром моделі, співвідношенням $\phi = \Delta_{\max} \sigma_{\max} / c$ (параметр $c = (3 - 2a_1 + 3a_2)/6$ є відношенням енергії руйнування трапецоїдального когезійного закону до енергії руйнування відповідного рівномірного закону з $c = 1$).

Використання внутрішньої когезійної моделі передбачає введення ділянки зміцнення в закон зчеплення—відриву. Ця ділянка не відображає фізичну природу руйнування (у вершині зони зчеплення сили зчеплення мають бути максимальними), але дозволяє отримати розв'язок без включення когезійної довжини в невідомі величини. Зазвичай фіктивну тріщину продовжують до границь тіла. У точках сітки, де розкриття є меншим за a_1 (довжина ділянки зміцнення в законі зчеплення), зчеплення відсутнє. Таким чином довжина зчеплення визначається неявно. У випадку продовження фіктивної тріщини до границі тіла за триточкового згину ця зона потрапляє в область великих стискаючих напружень — закон зчеплення треба продовжувати на від'ємний відрив (що за змістом схоже на принцип роботи штрафного методу при врахуванні контактних напружень). Швидкість збіжності за такого підходу є невеликою. З цієї причини сили зчеплення необхідно прикладати на ділянці, довжина якої напевне перевищує наперед невідому когезійну довжину. Непогане наближення для когезійної довжини дає класичний розв'язок для центральної тріщини у нескінченній пластині. В даній роботі цей прогноз модифіковано з врахуванням нерівномірності закону зчеплення шляхом ділення його на величину c . Отримані результати свідчать про ефективність цього підходу, особливо для великих значень міцності зчеплення.

Алгоритм розв'язання задачі в рамках лінійної механіки руйнування складається з внутрішньої і зовнішньої задач. Остання полягає у розв'язанні рівняння відносно однієї змінної v — вертикального переміщення штампа під дією сили P : $J(v) = \phi$, де J — інтеграл Черепанова—Райса [7]. В результаті отримуємо значення граничного переміщення v^* і відповідну силу P^* , за яких J -інтеграл дорівнює енергії руйнування ϕ . На кожному кроці зовнішньої задачі маємо розв'язок внутрішньої задачі відносно переміщень у вузлах сітки. Завдячуючи використанню штрафного методу цей процес також є ітеративним. Контактна сила є білінійною функцією — вона дорівнює нулю за відсутності перекриття поверхонь штампа і зразка та пропорційна перекриттю за його наявності. Таким чином, алгоритм полягає у розв'язанні системи нелінійних рівнянь на кожному кроці розв'язання іншого нелінійного рівняння однієї змінної. З метою уникнення виокремлення зовнішньої задачі авторами була здійснена спроба включити рівняння граничного стану рівноваги в систему рівнянь відносно вузлових переміщень, але досягти збіжності не вдалося.

В алгоритмі розв'язання задачі в рамках нелінійної механіки руйнування включення умови граничного стану не призводить до погіршення збіжності, оскільки при цьому до розв'язуючої системи додається одне лінійне рівняння відносно переміщення у вузлі, що відповідає вершині фізичної тріщини: $2u_x(0, a) = \Delta_{\max}$. Таким чином вдається уникнути виокремлення внутрішньої і зовнішньої задач, на які розділено розв'язання в алгоритмі лінійної механіки руйнування. Однак процес збіжності є достатньо повільним, тому для його пришвидшення було використано початкове наближення для вузлових переміщень, яке отримано в результаті розв'язання задачі для вертикального переміщення штампа на величину, що менша за критичне значення.

При розв'язанні задачі було обрано наступні геометричні параметри: $h = 5$ см, $w = 24$ см та $r = 1$ см (в позначеннях рис. 1, a); довжина тріщини $a = 1,5$ см. Механічні характеристики зразка: $E = 3$ ГПа та $\nu = 0,3$. Катки штампа та опори вважаються абсолютно жорсткими. Розв'язки отримано для плоскої деформації з одиничною товщиною зразка. У роботі не

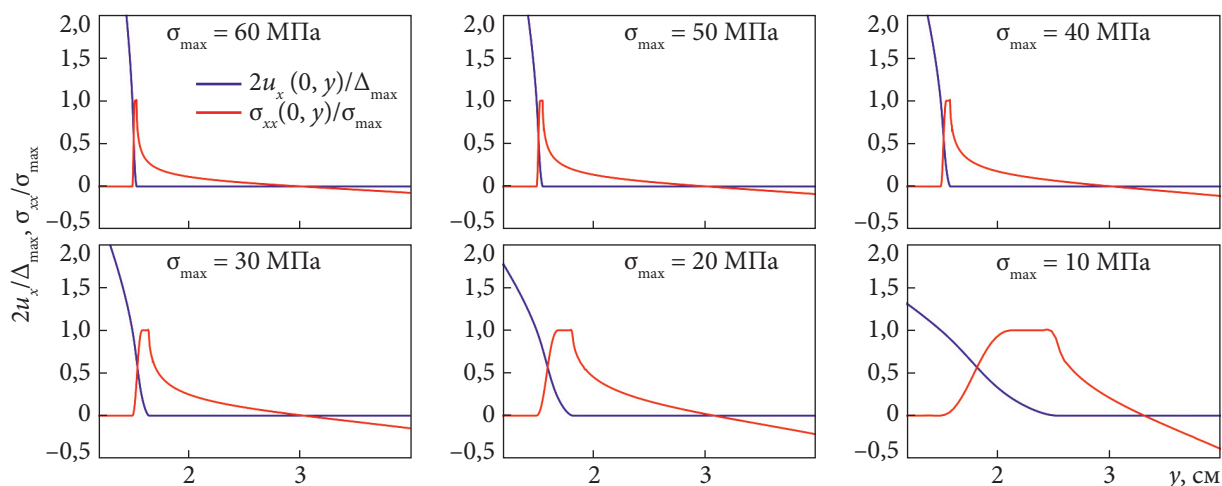


Рис. 2. Переміщення і напруження вздовж лінії тріщини

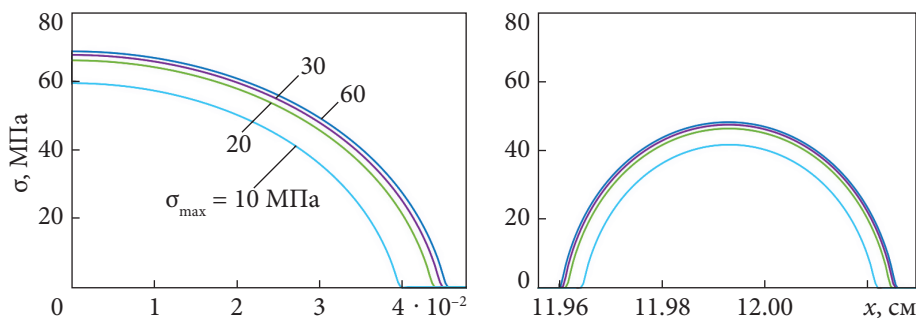


Рис. 3. Контактні напруження під штампом і опорою

досліджувались залежності критичного навантаження від енергії руйнування, яку зафіксовано на рівні $\phi = 750$ Н/м. Також незмінним для всіх отриманих результатів $a_1 = 0,0005$ і коефіцієнт штрафного методу $k = 10^7$ МПа/м. Параметр штрафу було обрано шляхом порівняння відомого аналітичного розв'язку про вдавлювання параболічного жорсткого штампа в пружну півплощину і числового розв'язку, отриманого методом штрафу. Враховано лише нормальну складову контактної взаємодії.

На рис. 2 проілюстровано розв'язки задачі для шести зазначених величин міцності зчеплення і параметра форми $a_2 = 0,2$. Зі зменшенням міцності зчеплення зростає когезійна довжина, яка відповідає стану граничної рівноваги, разом з тим розкриття в гирлі тріщини спадає. Рівні граничного навантаження, що відповідають наведеним розв'язкам, будуть проілюстровані далі на рис. 5. Зауважимо, що механічні характеристики матеріалу, для якого отримано розв'язки, близькі до характеристик поліметілметакрилату, міцність зчеплення якого становить приблизно 50 МПа. На рис. 3 проілюстровано відповідні контактні напруження під верхнім штампом і нижньою опорою. На рис. 4 зображено поле напруження σ_{xx} , отримане за $a_2 = 0,2$ і $\sigma_{\max} = 10$ МПа для стану граничної рівноваги. При побудові сітки методом скінченних елементів використано десятиточкові трикутники. В

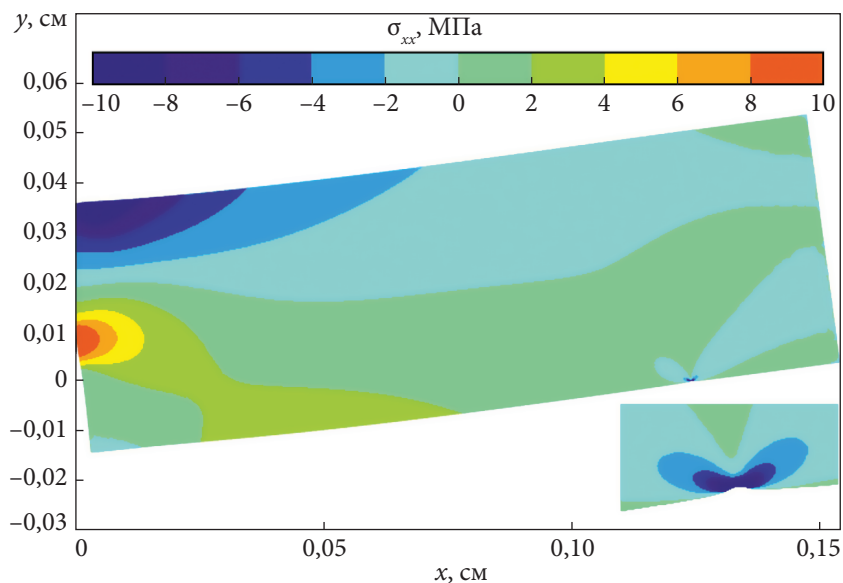


Рис. 4. Напруження σ_{xx} , що відповідають стану граничної рівноваги

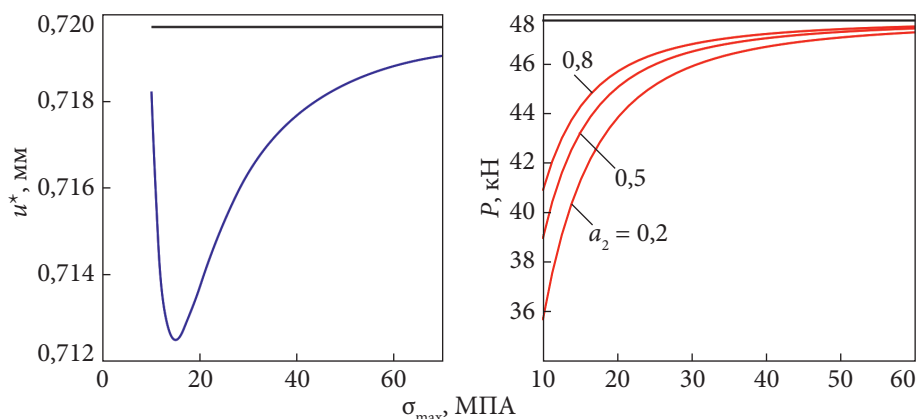


Рис. 5. Критичні переміщення штампта та відповідна сила в залежності від міцності зчеплення

результаті аналізу збіжності розв’язку вздовж спрогнозованих ділянок контакту і когезії було взято 50 елементів, в іншій області розмір елемента встановлено на рівні 0,5 см. Кількість невідомих у системі методу не перевищувала 30 тис.

На першому блоці рис. 5 відображена залежність критичного переміщення штампта від міцності зчеплення при $a_2 = 0,2$; горизонтальна крива відповідає прогнозу лінійної механіки руйнування. Очевидно, що міцність зчеплення практично не впливає на вертикальне переміщення штампта, яке відповідає стану граничної рівноваги. На другому блоці рис. 5 наведено аналогічні залежності для критичної сили, прикладеної до штампта. Тут додано дві залежності для інших параметрів когезійного закону. З рисунка бачимо, що чим ближ-

чим є когезійний закон до рівномірного (тобто чим ближчим до одиниці є значення параметра c), тим ближчими є прогнози нелінійної і лінійної механіки руйнування щодо значення критичного навантаження.

Зазначимо, що в даній роботі міцність зчеплення σ_{\max} разом з енергією руйнування та параметрами форми закону зчеплення—відриву є характеристикою тріщиностійкості. Ці характеристики можуть бути визначені експериментально в тому числі і за допомогою тесту на триточковий згин за встановленими стандартами (єдиною різницею є наявність в експериментальному зразку вирізу замість тріщини, яка розглянута в роботі). Мета даної роботи — окреслення межі застосування лінійно пружної механіки руйнування при визначенні рівнів граничних навантажень. Проілюстровано вплив на ці межі параметра міцності зчеплення і параметрів форми за незмінних значень інших параметрів задачі. Іншими словами, за даної енергії руйнування, яка є єдиним параметром тріщиностійкості в лінійній механіці руйнування і одним з параметрів тріщиностійкості в нелінійній механіці руйнування, в роботі досліджено вплив інших параметрів тріщиностійкості на рівні критичного навантаження.

Результати і висновки. В рамках моделі когезійної зони в роботі розроблено алгоритм визначення критичного навантаження в задачі про руйнування зразка з крайовою тріщиною за триточкового згину. Контакт зразка з роликками враховано штрафним методом. За допомогою розроблених та імplementованих алгоритмів визначення стану граничної рівноваги в рамках лінійної та нелінійної механіки руйнування проілюстровано вплив параметрів тріщиностійкості на граничний рівень навантаження. Встановлено, що зі збільшенням міцності зчеплення когезійна довжина спадає, а розкриття в гирлі тріщини збільшується. При цьому прогноз критичного навантаження в рамках нелінійної механіки руйнування стає ближчим до прогнозу лінійної механіки руйнування. Такий самий наслідок має наближення форми закону зчеплення до рівномірного.

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Gdoutos E.E. Fracture Mechanics: An Introduction. Cham: Springer, 2020. 477 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-35098-7>
2. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Preliminary consideration: background, approaches and their analysis. In: Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of materials under compression along cracks. — Advanced Structured Materials, Vol. 138. Cham: Springer, 2020. P. 1—59. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_1
3. Dahi Taleghani A., Gonzalez-Chavez M., Yu H., Asala H. Numerical simulation of hydraulic fracture propagation in naturally fractured formations using the cohesive zone model. *J. Pet. Sci. Eng.* 2018. 165 P. 42—57. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.01.063>
4. Kellner L. Lu W., Ehlers S., Høyland K.V. Study on the cohesive edge crack in a square plate with the cohesive element method. *Int. J. Fract.* 2021. 231. P. 21—41. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00560-9>
5. Alfano F., Furgieue F., Leonardi A., Maletta C., Paulino G.H. Cohesive zone modeling of mode I fracture in an adhesive-bonded joint. *Key Eng. Mater.* 2007. 348—349. P. 13—16.
6. Ruiz G. Propagation of a cohesive crack crossing a reinforcement layer. *Int. J. Fract.* 2001. 111. P. 265—282. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.348-349.13>
7. Cherepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture. New York: McGraw-Hill, 1979. 939 p.

Надійшло до редакції 30.05.2024

REFERENCES

1. Gdoutos, E. E. (2020). Fracture Mechanics: An Introduction. Cham: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-35098-7>
2. Guz, A. N., Bogdanov, V. L. & Nazarenko, V. M. (2020). Preliminary consideration: background, approaches and their analysis. In: Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of materials under compression along cracks. – Advanced Structured Materials, Vol. 138. Cham: Springer, pp. 1-59. https://doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1_1
3. Dahi Taleghani, A., Gonzalez-Chavez, M., Yu, H. & Asala, H. (2018). Numerical simulation of hydraulic fracture propagation in naturally fractured formations using the cohesive zone model. *J. Pet. Sci. Eng.*, 165, pp. 42-57. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2018.01.063>
4. Kellner, L. Lu, W., Ehlers, S. & Høyland, K. V. (2021). Study on the cohesive edge crack in a square plate with the cohesive element method. *Int. J. Fract.*, 231, pp. 21-41. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00560-9>
5. Alfano, F., Furgieue, F., Leonardi, A., Maletta, C. & Paulino, G. H. (2007). Cohesive zone modeling of mode I fracture in an adhesive-bonded joint. *Key Eng. Mater.*, 348–349, pp. 13-16.
6. Ruiz, G. (2001). Propagation of a cohesive crack crossing a reinforcement layer. *Int. J. Fract.*, 111, pp. 265-282. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.348-349.13>
7. Cherepanov, G. P. (1979). Mechanics of Brittle Fracture. New York: McGraw-Hill.

Received 30.05.2024

V.L. Bogdanov, <https://orcid.org/0000-0001-9864-9120>

D.M. Selivanov, <https://orcid.org/0009-0000-9927-9985>

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail: bogdanov@nas.gov.ua, dselivanov29@gmail.com

STUDY OF THE IMPACT OF CRACK RESISTANCE PARAMETERS
ON THE CRITICAL LOAD OF A SPECIMEN WITH A MODE I CRACK
UNDER THREE-POINT BENDING IN THE FRAMEWORK OF THE COHESIVE ZONE MODEL

In the presented study, a cohesive zone model is used to study the behavior of a specimen with a mode I edge crack under three-point bending. The cohesive zone includes an internal model characterized by a trapezoidal traction separation law. The parameter marking the beginning of the softening region of the law is investigated for its effect on the shape of the law. The contact interaction is examined using the penalty method in finite element analysis, and the effect of various cohesive zone parameters, such as cohesive strength and shape parameters, on the critical load is studied. It is found that an increase in cohesive strength leads to a decrease in cohesive length and an increase in crack mouth displacement. Moreover, it is observed that critical load predictions using nonlinear fracture mechanics agree more closely with linear fracture mechanics predictions as the cohesive strength increases. A similar effect is observed when the shape of the cohesion law approaches a uniform law. The study highlights the key role of cohesive zone parameters in influencing crack behavior and provides insights into their optimization to improve predictive modeling in fracture mechanics.

Keywords: *mode I edge crack, cohesive zone model, three-point bending, state of limiting equilibrium.*